

М. И. БАШМАКОВ
Б. М. БЕККЕР
В. М. ГОЛЬХОВОЙ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ
АЛГЕБРА И АНАЛИЗ





БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•
выпуск 22

М. И. БАШМАКОВ
Б. М. БЕККЕР
В. М. ГОЛЬХОВОЙ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ
АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

Под редакцией
Д. К. ФАДДЕЕВА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.10
Б 33
УДК 512

Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М.
Б33 Задачи по математике. Алгебра и анализ /Под ред Д. К. Фаддеева.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 192 с.— (Библиотечка «Квант». Вып. 22).— 35 коп.

В книге собраны задачи, представляющие основной круг идей школьного курса алгебры и начал математического анализа; специальные разделы посвящены комбинаторике и комплексным числам.

Особенностью книги является группировка задач в серии: в каждой серии задачи связаны общей идеей решения и расположены в порядке возрастания трудности. Это расположение материала, а также указания к каждой серии, составляющие вторую часть книги, и вводные замечания к отдельным главам помогут читателю в самостоятельной работе и приобретении навыков математического мышления.

Для школьников, преподавателей, лиц, занимающихся самообразованием, студентов педагогических вузов.

Б $\frac{1702030000-160}{053(02)-82}$ 187-82

ББК 22.10
512

Б $\frac{1702030000-160}{053(02)-82}$ 187-82

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5
Предисловие 6

Глава 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 9

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ 14
§ 1. Линейные функции 14
§ 2. Кусочно-линейные функции 15
§ 3. Дробно-линейные функции 17

Глава 3. КВАДРАТНЫЕ ФУНКЦИИ 18
§ 1. Параболы и окружности 18
§ 2. Исследование квадратной функции 21
§ 3. Среднее арифметическое и среднее геометрическое 24
§ 4. Рациональные уравнения и неравенства 26
§ 5. Иррациональные уравнения и неравенства 30

Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 31
§ 1. Определение тригонометрических функций 31
§ 2. Теоремы сложения 36
§ 3. Обратные тригонометрические функции 40
§ 4. Тригонометрические уравнения и неравенства 42
§ 5. Исследование тригонометрических функций 44

Глава 5. ПРОИЗВОДНАЯ 45
§ 1. Вычисление производных 45
§ 2. Касательная 47
§ 3. Монотонность. Экстремумы 49

Глава 6. ИНТЕГРАЛ 55
§ 1. Вычисление интегралов 55
§ 2. Приложения интеграла 60

Глава 7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 64
§ 1. Логарифмы 64
§ 2. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 65
§ 3. Натуральный логарифм 67
§ 4. Простейшие дифференциальные уравнения 70

Глава 8. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 71
§ 1. Математическая индукция 71
§ 2. Рекуррентные соотношения 74
§ 3. Суммирование 78

Глава 9. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ 80
§ 1. Числовые множества 80
§ 2. Числовые функции 84
§ 3. Предел последовательности 89
§ 4. Предел функции 94
§ 5. Свойства непрерывных функций 96

Глава 10. КОМБИНАТОРИКА 98
§ 1. Комбинаторные рассуждения 98
§ 2. Перебор вариантов 105
§ 3. Биномиальные коэффициенты 110

Глава 11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА 114
§ 1. Действия над комплексными числами 114
§ 2. Комплексная плоскость 116
§ 3. Корни многочленов 120

Указания и решения 123

Ответы 175

Дополнительные задачи 188

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Занятия математикой — это прежде всего решение задач. Задачи могут быть разными — от простых вычислений по формулам, занимающих считанные минуты, до получения новых качественных результатов, требующих многочасовых усилий, а иногда длящихся месяцы и годы. Какую бы задачу Вы ни решали, в конце Вас ждет счастливая минута — радостное чувство успеха, укрепление веры в свои силы.

Предлагаемый Вашему вниманию задачник — вдумчивый путеводитель по огромному морю школьных задач по алгебре и началам анализа. Задачи собраны в циклы, которые позволяют, начав с легких упражнений, прийти к трудным новым теоремам.

В задачнике Вы найдете краткие теоретические сведения, определения и формулы, достаточные, чтобы начать решать задачи. Желаю Вам больших успехов в занятиях замечательной наукой — математикой.

Д. К. Фаддеев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — задачник, охватывающий основные темы школьного курса алгебры и анализа: числа, функции, различные операции над ними. Среди собранных здесь задач есть традиционные упражнения на непосредственное применение изученных в школьном курсе правил и теорем, но много и таких, которые могут значительно расширить математический кругозор читателя — школьника; это задачи, в которых нужно творчески осмыслить основные вопросы школьного курса, установить связи между различными темами, самостоятельно изучить новые понятия. Цель книги — пополнить запас таких задач и представить в них наиболее существенные идеи и методы, которыми пронизан школьный курс математики (в части, условно относящейся к алгебре и анализу). Этих идей на самом деле не так уж много, и активное их осознание поможет читателю не только ориентироваться в разнообразных школьных и конкурсных задачах, но и составить более цельное впечатление о содержании и возможных применениях математического анализа. Две последние главы посвящены комбинаторике и комплексным числам. Эти важные темы не входят в действующую школьную программу и у читателя не предполагается наличия каких-либо предварительных знаний по этим темам.

Однако настоящая книга отнюдь не представляет собой простого собрания задач. Главное заключается в расположении материала: оно должно побуждать читателя к самостоятельной работе и прививать ему навыки математического мышления. Авторы надеются достичь этого благодаря объединению задач в циклы, которые начинаются с конкретных примеров, простых вопросов и постепенно подводят к более общим и трудным. При этом, как правило, упражнения на один и тот же прием не дублируются — каждое содержит какой-то новый элемент, так что

решать их в каждом цикле полезно подряд. Задачи имеют двойную нумерацию (например: 3.14 означает 14-ю задачу 3-й главы; она, в свою очередь, делится на пять пунктов 1) — 5); некоторые такие задачи-циклы имеют маленькие подзаголовки, называющие тему этого цикла (например: 3.15 — *теорема Виета*, 3.16 — *расположение корней квадратного трехчлена*).

Перед текстом отдельных задач, а также в начале параграфов помещен небольшой теоретический вводный текст, где сообщаются необходимые сведения—формулы, определения новых понятий и т. п., так что задачником можно пользоваться независимо от того или иного учебного пособия.

В конце книги почти к каждому циклу задач даны краткие указания, которыми мы советуем постоянно пользоваться, особенно после попыток самостоятельно решить задачу и в тех случаях, когда возникли затруднения из-за каких-либо новых, непривычных понятий или постановок вопросов.

Как обычно, наиболее трудные задачи обозначены звездочкой. Ко всем таким задачам даны решения или указания.

Несколько интересных и трудных задач, не связанных непосредственно с материалом той или иной главы задачника, выделены в самостоятельный раздел под названием «Дополнительные задачи». Ко всем этим задачам даны подробные решения.

При отборе задач авторы использовали материалы, опубликованные в разные годы в журнале «Квант», задачи международных, всесоюзных и ленинградских математических олимпиад, задачи конкурсных экзаменов ведущих московских и ленинградских вузов. Ряд задач составлен специально для этой книги.

Авторы надеются, что учителя, руководители кружков оценят новую постановку вопросов в традиционных ситуациях.

Книга предназначена прежде всего для самостоятельной работы и рассчитана на учеников старших классов школы, интересующихся математикой, но авторы надеются, что она будет полезной также преподавателям средней школы, руководителям математических кружков и студентам.

Многие циклы задач могут служить основой для занятия школьного кружка.

Приносим глубокую благодарность педагогам и математикам, работавшим в различное время в ФМШ при ЛГУ, опыт которых отражен в этой книге. Особую признательность авторы приносят Ю. И. Ионину, совместная работа с которым в течение многих лет определила замысел и исполнение этой книги. Авторы благодарны Н. Б. Васильеву, Л. Д. Курляндчику, А. Е. Кучме, А. И. Плоткину и С. В. Фомину за помощь и полезные советы.

Авторы

Глава 1

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

1.1. *Десятичная запись рационального числа.* Построение десятичной записи произвольного вещественного числа легко сводится к построению десятичной записи чисел отрезка $[0; 1]$. Пусть α — число из отрезка $[0; 1]$. Разобьем этот отрезок на десять равных частей, занумеруем их последовательно цифрами 0, 1, 2, . . ., 9 и обозначим через c_1 номер отрезка, содержащего число α. Разобьем отрезок $\left[\frac{c_1}{10}; \frac{c_1+1}{10}\right]$ (это и есть отрезок с номером c_1) на десять равных частей, занумеруем их последовательно цифрами 0, 1, 2,. . ., 9 и обозначим через c_2 номер отрезка, содержащего α, и так далее. Бесконечная десятичная дробь $0, c_1 c_2 \ldots$ и является десятичной записью числа α.

1. Докажите, что рациональное число, которое можно представить в виде $\frac{m}{10^n}$ (m, n — целые), имеет две десятичные записи. Как эти записи связаны с десятичной записью числа m? Докажите, что рациональные числа, не представимые в виде $\frac{m}{10^n}$, имеют одну десятичную запись.

2. Докажите, что первая цифра десятичной записи несократимой правильной дроби p/q, где q отлично от 2, 5, 10, равна целой части числа $\frac{10p}{q}$.

3. Правильная дробь p/q не представима в виде $\frac{m}{10^n}$, r — остаток от деления $10p$ на q. Докажите, что если $0, c_1c_2c_3 \ldots$ — десятичная запись числа p/q, то $0, c_2c_3c_4\ldots$ — десятичная запись числа r/q.

4. Докажите, что десятичная запись рационального числа периодична. (Бесконечная десятичная дробь $0, c_1c_2c_3\ldots$ называется *периодической*, если найдутся такие номера k и l, что $c_k = c_l$, $c_{k+1} = c_{l+1}$ и т. д. Такая дробь записывается в виде $0, c_1c_2\ldots c_{k-1}(c_k\ldots c_{l-1})$. Дробь вида $0, (c_1c_2\ldots c_m)$ называется *чисто периодической*.)

5. Найдите десятичные записи чисел $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{37}{30}$.

6. Натуральное число q не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что существует такое натуральное число n, что $10^n - 1$ делится на q.

7. p и q — натуральные числа, $p < q$, q не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что десятичная запись числа p/q — чисто периодическая. Если n — наименьшее натуральное число, такое, что $10^n - 1$ делится на q, то период десятичной записи числа p/q состоит из n цифр.

8. Докажите, что любая бесконечная чисто периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа, представимого в виде дроби, знаменатель которой не делится ни на 2, ни на 5.

9. Докажите, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь является десятичной записью какого-либо рационального числа.

1.2. Докажите, что между любыми двумя вещественными числами есть бесконечно много рациональных чисел и бесконечно много иррациональных чисел.

1.3. *Десятичная запись иррационального числа.* Докажите иррациональность чисел:

1. 0, 101001000100001 ...
2. 0, 123456789101112 ...
3. 0, 1491625364964 ...

4*. 0, 248163264128256 ...

1.4. Зная достаточное количество цифр в десятичных записях двух чисел, можно найти требуемое количество цифр в десятичной записи их суммы, разности, произведения, частного. Выясните, сколько можно найти десятичных знаков чисел $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ по заданным десятичным знакам чисел α и β:

1. $\alpha = 2, 30114\ldots$, $\beta = 0, 23761\ldots$,
2. $\alpha = 3, 12375\ldots$, $\beta = 1, 02784\ldots$

1.5. В некоторых случаях несколько первых цифр десятичной записи числа можно найти, оценив это число с достаточной степенью точности.

Найдите первые 20 цифр после запятой в десятичной записи чисел:

1. $\sqrt{1-(0,1)^{20}}$. 2. $(5-\sqrt{26})^{20}$.

3. $(5+\sqrt{26})^{20}$. 4. $(\sqrt{1001}-\sqrt{1000})^{12}$.

1.6. Выясните, какое из чисел больше:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$.
2. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ или $2\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{6}+2\sqrt{7}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{21}$.
4. $\sqrt{11}$ или $5-\sqrt[3]{5}$.

1.7. Известно, что для натуральных чисел n и a число $\sqrt[n]{a}$ является либо целым, либо иррациональным. Докажите иррациональность чисел:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 2. $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$.

3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. 4. $(2+\sqrt{3})^{100}$.

5. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$. 6. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

1.8. *Освобождение от иррациональности в знаменателе.* Среди вещественных чисел выделяются те, которые можно получить из рациональных чисел с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня. Справедливо следующее утверждение: *всякое число, которое можно получить из рациональных чисел с помощью этих операций, можно получить из рациональных чисел и не используя операцию деления.* Мы предлагаем вам проверить это утверждение в нескольких частных случаях. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5. $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$. 6. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. 7. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

8. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$. 9. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{7}}$. 10. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$.

1.9. *Формула сложного радикала.* Эта формула позволяет в некоторых случаях проще записывать числа вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ и $\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

1. Представьте числа $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$, $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ или $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

2. a и b — рациональные числа, $\sqrt{b}$ — иррациональное число. Докажите, что число $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ можно представить в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, где x и y — рациональные числа, в том и только в том случае, если число $\sqrt{a^2-b}$ — рациональное. Выясните, при каком условии число $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ можно представить в виде $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

1.10. *Числовая ось.* Вещественные числа изображаются точками числовой оси. Расстояние между точками, изображающими числа α и β, равно $|\alpha-\beta|$. Пользуясь этим, решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|x-1|=2$.
2. $|x|+|x-3|=5$.
3. $|x-1|+|x-5|=3$.
4. $|x+1|+|x-2|=3$.
5. $|x-5|-|x-1|=2$.
6. $|x+3|-|x-2|=5$.
7. $|x-1|=2|x-4|$.
8. $|x-3|\leqslant 2$.
9. $|x+1|>1$.
10. $2\leqslant|x|<3$.
11. $|x-2|\leqslant|x-4|$.
12. $|x-1|+|x+3|<6$.
13. $|x-2|+|x|\geqslant 2$.

1.11. *Перемещения на числовой оси.* Перемещение на числовой оси — это функция φ, заданная на всей числовой оси и сохраняющая расстояния между точками числовой оси, т. е. удовлетворяющая условию: для любых чисел α и β выполняется равенство $|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|=|\alpha-\beta|$.

1. Докажите, что перемещение на числовой оси есть либо параллельный перенос, т. е. задается формулой вида $\varphi(x)=x+a$, либо центральная симметрия, т. е. задается формулой вида $\varphi(x)=a-x$.

2*. Существует ли перемещение на числовой оси, преобразующее множество всех рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, в множество всех рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$?

3**. Докажите, что можно разбить множество всех рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, на такие части A_1 и A_2, а множество всех рациональных чисел, бо́льших $\sqrt{2}$, на такие части B_1 и B_2, что A_1 переводится некоторым перемещением в B_1, а A_2 переводится некоторым (возможно, другим) перемещением в B_2.

1.12. *Наилучшие приближения.* Для данного иррационального числа не существует самого близкого к нему рационального числа. Говоря, что несократимая дробь p/q (p, q — натуральные числа) является наилучшим приближением положительного вещественного числа α, мы будем иметь в виду, что любая дробь, более близкая к числу α, чем p/q, имеет знаменатель, больший q. В этой задаче мы укажем простой способ нахождения всех наилучших приближений данного вещественного числа.

Для каждого натурального n можно все несократимые дроби отрезка [0; 1] со знаменателями, не превосходящими n, выписать в порядке возрастания, начиная с $\frac{0}{1}$ и кончая $\frac{1}{1}$. Получаемая последовательность дробей называется *последовательностью Фарея* порядка n и обозначается F_n.

1. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа и $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

2*. Пусть $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ — последовательные члены последовательности F_{n-1} и $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}$. Докажите, что если последовательность F_n содержит такую дробь $\frac{m}{n}$, что $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}<\frac{c}{d}$, то $\frac{m}{n}=\frac{a+c}{b+d}$. (В этом случае дробь $\frac{m}{n}$ называется *медиантой* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.)

3. Докажите, что если $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{p}{q}$ — последовательные члены какой-нибудь последовательности Фарея, то $|bc-ad|=1$ и $\frac{c}{d}=\frac{a+p}{b+q}$.

4. α — иррациональное число из отрезка [0; 1]. Последовательность отрезков $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$,... строится следующим образом: в качестве $[a_1; b_1]$ берется отрезок [0;

1]; разбивая этот отрезок на две части медиантой его концов, примем за $[a_2; b_2]$ ту из частей, которая содержит число α; разбивая отрезок $[a_2; b_2]$ на две части медиантой его концов, примем за $[a_3; b_3]$ ту часть, которая содержит α и т. д. Докажите, что ближайший к α конец каждого из отрезков построенной последовательности является наилучшим приближением к α. Докажите, что так мы получим все наилучшие приближения числа α.

5. Найдите все наилучшие приближения числа π со знаменателями, меньшими 50.

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Линейные функции

Линейная функция задается на всей числовой оси формулой вида $y = kx + b$, где k и b — вещественные числа. График линейной функции — прямая. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой и равно тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс. Любая прямая, не параллельная оси ординат, является графиком некоторой линейной функции. Прямые, параллельные оси ординат, задаются уравнениями вида $x = a$.

2.1. Для того, чтобы задать прямую, достаточно указать на ней две различные точки или же одну точку и направление.

Найдите уравнения прямых, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Прямая проходит через точки (2; 0) и (—1; 3).
2. Прямая проходит через точки (2; 1) и (2; 7).
3. Прямая проходит через начало координат и параллельна прямой $y = 2x - 1$.
4. Прямая проходит через точку (—1; 2) и параллельна прямой $3x - 5y = 2$.
5. Прямая равноудалена от точек (1; 1) и (3; 3) и перпендикулярна прямой, проходящей через эти точки.

2.2. Всякое уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств задает на координатной плоскости фигуру, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, неравенству, системе.

Изобразите фигуры, задаваемые следующими условиями:

1. $xy = 0$. 2. $\frac{x}{y} = 0$. 3. $\frac{x+1}{y-2} = 2$.

4. $x^2 - y^2 = 0$. 5. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

6. $x^2 - y^2 = x + y$.

7. $x > 1$. 8. $y < 2$. 9. $x > y$.

10. $xy \leqslant 0$. 11. $y > 2x - 1$. 12. $y \leqslant 1 - x$.

13. $y^2 > y$. 14. $x^2 < y^2$.

15. $\begin{cases} 2x - y < 1, \\ x - 2y \geqslant 3. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x + 2y > 1, \\ 2x + 4y \leqslant 3. \end{cases}$

§ 2. Кусочно-линейные функции

Функция, определенная на всей числовой оси, называется *кусочно-линейной*, если числовую ось можно разбить на промежутки ненулевой длины, внутри каждого из которых эта функция линейна. Простыми примерами кусочно-линейных функций являются функции

$$y = \operatorname{sign} x,\ y = [x],\ y = \{x\},\quad y = |x|.$$

Функция $y = \operatorname{sign} x$ (знак x) задается формулой

$$y = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

функция $y = [x]$ (целая часть x) ставит в соответствие каждому вещественному числу x наибольшее целое число, не превосходящее x; функция $y = \{x\}$ (дробная часть x) задается формулой $y = x - [x]$; наконец, функция $y = |x|$ задается формулой

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2.3. Постройте графики функций:

1. $y = \operatorname{sign} x$. 2. $y = [x]$. 3. $y = \{x\}$.

4. $y = \operatorname{sign} [x]$. 5. $y = \{x\} + \operatorname{sign} x$. 6. $y = x + [x]$.

7. $y = x + \{x\}$. 8. $y = \left\{\frac{2x-3}{5}\right\}$.

2.4. Постройте графики функций:

1. $y = |x|$. 2. $y = |2x - 3|$. 3. $y = |x + 1| + 2$.
4. $y = |x - 1| + |x + 2| - 3x + 1$.
5. $y = |x - 3| + |2x + 5| - 8$.

2.5. Решите уравнения:

1. $|2x - 4| = 3x - 1$. 2. $|2x + 1| = |x - 1| + 2$.
3. $|2x - 3| - |x + 1| = 5x - 10$.
4. $|2x - 2| + |x| = 3x - 2$.

2.6. Решите неравенства:

1. $|x - 1| \geqslant 2x - 1$. 2. $2|x - 3| < |x| + 2$.
3. $|4 - x| + 2|x + 1| > |x| + 2x + 2$.

2.7. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y$. 2. $|x| = |y|$. 3. $[x] = [y]$.
4. $\operatorname{sign} x = [y]$. 5. $|x| = \operatorname{sign} y$. 6. $|x| = [y]$.
7. $y < \{x\}$. 8. $\{x\} \leqslant \{y\}$.

2.8. Уравнение $ax + by + c = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a, b отличен от нуля, задает на координатной плоскости прямую. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, причем координаты точек одной из этих полуплоскостей удовлетворяют неравенству $ax + by + c \geqslant 0$, а координаты точек другой полуплоскости удовлетворяют неравенству $ax + by + c \leqslant 0$.

Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $|x| + |y| = 1$.
2. $|x + 1| + |x - 1| = |y + 1| + |y - 1|$.
3. $|x - y| - |2x + y| = |x - 1|$. 4. $|x| - |y| \geqslant 2$.
5. $|x + y + 1| + |x - 2y| \leqslant 4$.

2.9. *Графическое решение уравнений и неравенств, содержащих параметр.*

1. Для каждого значения a решите уравнение

$$|x - a + 1| + |x - 2a| = x.$$

2. Для каждого значения a решите неравенство

$$|3x - a| + |2x + a| \leqslant 5.$$

3. Найдите все значения a, при которых наибольшее значение функции $y = 2|x + a + 1| - |2x - a|$ меньше 2.

§ 3. Дробно-линейные функции

Простейшим примером дробно-линейной функции является обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. График этой зависимости — линия, называемая *гиперболой*. Вообще, гиперболой будем называть любую линию на плоскости, которая в какой-либо системе координат является графиком обратно пропорциональной зависимости.

2.10. Докажите, что график каждой из следующих функций является гиперболой. Постройте эти графики.

1. $y = \frac{1}{x}$. 2. $y = -\frac{3}{x}$. 3. $y = 2 - \frac{1}{x}$.

4. $y = \frac{x+1}{2x}$. 5. $y = \frac{2}{x-1}$. 6. $y = 1 + \frac{2}{3x-1}$.

7. $y = \frac{2x+1}{x-2}$. 8. $y = \frac{1-x}{3x+2}$.

2.11. Дробно-линейная функция задается формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Докажите, что, если $c \neq 0$, $d \neq 0$ и $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, то график дробно-линейной функции — гипербола. Выясните вид графика в остальных случаях.

2.12. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $xy = y + 1$. 2. $xy + x = 2y + 1$. 3. $|xy| = x - y$.

4. $xy = |x| + |y|$. 5. $xy > 1$. 6. $xy < 1$.

7. $x^2y + xy^2 \leqslant 2xy$. 8. $\frac{y+1}{xy+1} > -1$.

2.13. Вершины A и C прямоугольника $ABCD$ лежат на гиперболе $xy = 1$, а стороны прямоугольника параллельны координатным осям. Докажите, что прямая BD проходит через начало координат.

2.14. *Гипербола как геометрическое место точек.*

1. Докажите, что гипербола $xy = 1$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, разность расстояний которых до точек $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ равна $2\sqrt{2}$.

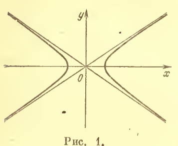


Рис. 1.

2. Докажите, что гиперболы $xy = 1$ и $xy = k$ подобны. Чему равен коэффициент подобия?

3. Докажите, что для гиперболы $xy = k$ можно указать такие точки F_1 и F_2 (*фокусы гиперболы*) и такое число a, что эта гипербола есть геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна a.

В геометрии гиперболой называют любую линию, являющуюся геометрическим местом точек, разность расстояний которых до двух данных точек постоянна. Этому определению удовлетворяют не только графики обратно пропорциональных зависимостей, но и другие линии, например, кривая, задаваемая уравнением $x^2 - 2y^2 = 1$ (см. рис. 1).

Глава 3

КВАДРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Параболы и окружности

Квадратная функция задается формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — вещественные числа, $a \neq 0$. Любая линия на плоскости, которая в некоторой системе координат является графиком квадратной функции, называется *параболой*.

3.1. Из следующих задач вытекает подобие любых двух парабол.

1. Докажите, что параболу $y = ax^2 + bx + c$ можно получить параллельным переносом параболы $y = ax^2$.

2. Докажите, что параболы $y = x^2$ и $y = ax^2$ подобны. Чему равен коэффициент подобия?

3.2. *Построение парабол.*

1. Докажите, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ симметрична относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

2. Постройте параболы $y = x^2 + 2$, $y = -2x^2 - 3$, $y = 4x^2 + 4x + 1$, $y = -3x^2 - 6x + 2$.

3.3. Прямая однозначно определяется точкой и направлением. Покажем, что парабола однозначно определяется тремя точками и направлением оси симметрии.

1. Найдите квадратную функцию, график которой проходит через точки (1; 2), (−1; 3), (0; 0).

2. Точки A, B, C координатной плоскости имеют попарно различные абсциссы и не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная квадратная функция, график которой проходит через эти точки.

3. На плоскости даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и прямая l, не параллельная прямым AB, AC, BC. Докажите, что существует единственная парабола, проходящая через точки A, B, C, ось симметрии которой параллельна прямой l.

3.4. *Парабола как геометрическое место точек.*

1. Докажите, что парабола $y = x^2$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, равноудаленных от точки $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ и прямой $y = -\frac{1}{4}$.

2. Докажите, что любая парабола есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки F (*фокуса* параболы) и некоторой прямой d (*директрисы* параболы).

3. В геометрии параболой называют геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки и некоторой прямой, не проходящей через эту точку. Докажите, что такое геометрическое место точек в некоторой системе координат является графиком квадратной функции.

3.5. Найдите область значений каждой из следующих функций:

1. $y = x^2 - x$, где $x \geqslant 1$.

2. $y = x^2 - x$, где $x \in [-1; 1]$.

3. $y = x^4 + 4x^2 - 5$.

4. $y = (x^2 - x - 3)^2 - 2(x^2 - x) + 1$.

5. $y = \{x\} - 2\{x\}^2$.

3.6. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $x^2 = 2y + 1$. 2. $x = y^2$.

3. $y^2 + x = y$. 4. $y > x^2$.

5. $y \leqslant 1 - x - x^2$. 6. $x < y + y^2$.

3.7. Найдите все вещественные числа, каждое из которых является корнем какого-либо уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, где $|p| \leqslant 1$, $|q| \leqslant 1$.

3.8. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями:

1. $y = |x^2 - x|$. 2. $|y| = x^2 - x$.

3. $|y| = |x^2 - x|$. 4. $y^2 = |x + y|$.

5. $x^2 = |y - x^2|$. 6. $|x| + |y| = |y^2 + x|$.

3.9. *Уравнение окружности.* Окружность радиуса R с центром в точке $(a; b)$ задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

1. Докажите, что каждое из уравнений $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 4y = 5$, $x^2 - 3x + y^2 + 2y = 0$ задает окружность. Найдите центры и радиусы этих окружностей.

2. Докажите, что уравнение $x^2 + ax + y^2 + by = c$ задает окружность в том и только в том случае, если $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$.

3.10. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими неравенствами:

1. $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

2. $4x^2 + 4y^2 \geqslant 4x + 2$.

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2x, \\ y \geqslant x^2. \end{cases}$

3.11. *Графическое решение систем неравенств, содержащих параметр.* Для каждого значения a решите системы неравенств:

1. $\begin{cases} x - a > -1, \\ x^2 - 3x < a - 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + a^2 < 1, \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + x \leqslant a, \\ 2x - x^2 \geqslant a - 1. \end{cases}$

3.12. *Параболы с взаимно перпендикулярными осями симметрии.*

1. Докажите, что точки пересечения парабол $y = x^2 + x - 40$ и $x = y^2 + y - 41$ лежат на одной окружности.

2. Докажите, что точки пересечения двух конгруэнтных парабол с взаимно перпендикулярными осями лежат на одной окружности.

§ 2. Исследование квадратной функции

3.13. *Квадратное уравнение.* Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, называется *квадратным уравнением.* Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* этого уравнения. При $D \geqslant 0$ вещественные корни уравнения вычисляются по формулам $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (при $D = 0$ эти корни совпадают); при $D < 0$ уравнение вещественных корней не имеет.

1. При каких значениях a уравнение $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$ не имеет вещественных корней?

2. При каких значениях a парабола $y = 2x^2 - x - a$ и прямая $y = 3x - 1$ имеют одну общую точку?

3. При каких значениях a параболы $y = x^2 + ax - 3$ и $y = 2x^2 - a$ имеют две общих точки?

3.14. Число корней квадратной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ можно определять не только с помощью дискриминанта. Докажите следующие утверждения:

1. Если для некоторых чисел α и β произведение $f(\alpha) f(\beta)$ отрицательно, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

2. Если для некоторого числа α произведение $af(\alpha)$ отрицательно, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

3. Если $a(a + b + c) < 0$, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

4. Если $c(a - b + c) < 0$, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

5. a, b, c — вещественные числа. Докажите, что уравнение $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c) \times (x - a) = 0$ имеет вещественный корень.

3.15. *Теорема Виета.* Числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ в том и только в том случае, если $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

1. x_1, x_2 — корни уравнения $3x^2 - 5x - 7 = 0$. Вычислите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$.

2. Прямая, проходящая через точку C, лежащую на оси ординат, пересекает параболу $y = x^2$ в точках A и B. Докажите, что произведение абсцисс точек A и B не зависит от углового коэффициента прямой.

3. Прямые l_1 и l_2 пересекают параболу $y = x^2$ в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Докажите, что, если l_1 и l_2 параллельны, то сумма абсцисс точек A_1 и B_1 равна сумме абсцисс точек A_2 и B_2.

4. Найдите квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $2 - \sqrt{3}$.

3.16. *Расположение корней квадратной функции.* Предположим, что квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет два вещественных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$. При $a > 0$ эта функция принимает отрицательные значения в промежутке $(x_1; x_2)$ и принимает положительные значения вне промежутка $[x_1; x_2]$; при $a < 0$ функция принимает положительные значения в промежутке $(x_1; x_2)$ и принимает отрицательные значения вне промежутка $[x_1; x_2]$. Для того, чтобы для произвольного числа α выяснить, принадлежит ли оно промежутку $(x_1; x_2)$, достаточно знать знак коэффициента a и знак числа $a\alpha^2 + b\alpha + c$.

1. При каких значениях a уравнение $ax^2 - (a^2 + 3)x + 2 = 0$ имеет два вещественных корня разных знаков?

2. При каких значениях a уравнение $ax^2 - (3a - 3)x + 4a - 4 = 0$ имеет два вещественных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1?

3. При каких значениях a каждое число из промежутка $[1; 2]$ удовлетворяет неравенству $x^2 + (a - 2)x - a \leqslant 0$?

4. При каких значениях a неравенство $2x^2 + ax - 5 > 0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $|x| < 1$?

3.17. *Расположение корней квадратной функции* (продолжение). Если известно, что число α не находится в промежутке между корнями квадратной функции, то, чтобы выяснить, по какую сторону от этого промежутка оно расположено, достаточно сравнить α с каким-нибудь числом, которое заведомо расположено между корнями, например, с числом $-b/2a$.

1. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$ меньше 3?

2. При каких значениях a хотя бы одно число, большее 1, удовлетворяет неравенству $x^2 - ax + 2a \leqslant 0$?

3. При каких значениях a каждое число из промежутка $[-1; 1]$ является решением неравенства $ax^2 + 2(a + 1)x + a - 4 \leqslant 0$?

3.18. Задачу нахождения области значений функции $y = f(x)$ можно переформулировать так: найти все значения a, при которых $f(x) = a$ имеет хотя бы один вещественный корень. Найдите область значений функций:

1. $y = x + \frac{1}{x}$. 2. $y = x - \frac{1}{x}$.

3. $y = \frac{x^2 - 10x + 7}{2x^2 - 1}$. 4. $y = \frac{3x}{4x^2 - x + 1}$.

3.19. *Наибольшее и наименьшее значения квадратной функции на отрезке.* Если $a > 0$, то наибольшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ достигается либо при $x = \alpha$, либо при $x = \beta$; наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$ на этом отрезке достигается либо при $x = \alpha$, либо при $x = \beta$, либо при $x = -\frac{b}{2a}$ $\left(\text{если } -\frac{b}{2a} \in [\alpha; \beta]\right)$. Нетрудно сформулировать аналогичные условия для $a < 0$.

1. Постройте график функции, ставящей в соответствие каждому числу x наименьшее значение функции $f(t) = t^2 - 2t$ на промежутке $[x - 1; x]$.

2. Вещественные числа x, y, a таковы, что $x + y = a - 1$, $xy = a^2 - 7a + 14$. При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

3.20*. Квадратная функция задана формулой $f(x) = x^2 - 2$. Докажите, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет восемь вещественных корней.

3.21*. Вещественные числа a, b, c таковы, что для любого числа x из промежутка $[-1; 1]$ справедливо неравенство $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$. Докажите, что для любого числа x из промежутка $[-1; 1]$ справедливо неравенство $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$.

3.22*. Среди всех квадратных функций со старшим коэффициентом 1 найдите ту, для которой на промежутке $[-1; 1]$ наибольшее по модулю значение минимально.

3.23*. Докажите, что среди значений функции $y = x^2 + px + q$ в любых трех различных целых точках хотя бы одно по модулю не меньше $1/2$.

§ 3. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, *средним геометрическим* неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Содержание этого параграфа составляет замечательное неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, и следствия из него.

3.24. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ строго убывает на промежутке $(-\infty; -b/2a]$ и строго возрастает на промежутке $[-b/2a; +\infty)$, а при $a < 0$ строго возрастает на промежутке $(-\infty; -b/2a]$ и строго убывает на промежутке $[-b/2a; +\infty)$.

1. Найдите промежутки монотонности функции $y = x(a-x)$.

2. Докажите, что произведение двух чисел с заданной суммой тем больше, чем ближе эти числа друг к другу.

3. Сумма n положительных чисел равна a. Докажите, что произведение этих чисел максимально, если каждое из них равно $\frac{a}{n}$.

4. Докажите, что среднее геометрическое n неотрицательных чисел не превосходит среднего арифметического этих чисел. В каких случаях среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

5. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительные числа. Докажите неравенства

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n,$$

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geqslant n a_1 a_2 \ldots a_n,$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

3.25. Неравенства, которые вам предлагается доказать в этой задаче, можно вывести из неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического, установленного в предыдущей задаче.

1. Если x — положительное число, то $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2. a, b — положительные числа. Найдите наименьшее значение функции $y = ax + \frac{b}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

3. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

4. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

5. $a^8 + b^8 + c^8 \geqslant a^2b^2c^2\ (ab + bc + ca)$.

6. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$.

7. $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2$.

8. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$(a + b)\ (b + c)\ (c + a) \geqslant 8abc.$$

9. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$(a + b - c)\ (b + c - a)\ (c + a - b) \leqslant abc.$$

10. Если a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, произведение которых равно 1, то

$$(1 + a_1)\ (1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

11. Если a_1, a_2, b_1, b_2 — неотрицательные числа, то

$$\sqrt{(a_1 + b_1)\ (a_2 + b_2)} \geqslant \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{b_1b_2}.$$

12. Если $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — неотрицательные числа, то

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}.$$

13. Если a, b, c — положительные числа и $a + b + c = 1$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

14. Если a, b, c — положительные числа и $a + b + c = 1$, то

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geqslant 64.$$

15. Если a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, произведение которых равно 1, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n.$$

16. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

17*. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа ($n\geqslant 2$), S — их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

18. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

19**. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}.$$

20. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (n — натуральное число, $n\geqslant 2$).

21*. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, то

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}\leqslant a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

22*. Если m, n — натуральные числа, α — вещественное число, $\alpha>-1$, $\alpha\neq 0$, то

$$\sqrt[n]{(1+\alpha)^m}<1+\frac{m}{n}\alpha \quad \text{при} \quad m<n,$$
$$\sqrt[n]{(1+\alpha)^m}>1+\frac{m}{n}\alpha \quad \text{при} \quad m>n.$$

§ 4. Рациональные уравнения и неравенства

3.26. Решите уравнения:

1. $\frac{3}{5x+2}-\frac{6}{x-2}=\frac{4}{3-x}$. 2. $\frac{3-x}{x+3}+\frac{15-x}{x^2+8x}=0$.

3. $\frac{1}{2x^2-x-3}+\frac{1}{3x^2+x-2}=\frac{1}{6x^2+7x+1}$.

4. $\frac{3-2x}{2x^2+7x-4}+\frac{3x+1}{2x^2-7x+3}=\frac{x+11}{x^2+x-12}$.

3.27. Решите уравнения:

1. $3x^4 - x^2 - 2 = 0.$ 2. $2x^6 - 11x^3 - 40 = 0.$

3. $3(2x^2 + x - 2)^2 = 8x^2 + 4x - 9.$

4. $\left(\frac{x^2 - x - 1}{3x - 5}\right)^2 - \frac{x^2 - x - 1}{3x - 5} = 2.$

5. $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} + \frac{6x + 10}{2x^2 - 3x + 5} = 3.$

6. $\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x}\right)^2 - 5x = \frac{15}{x} - 16.$

7. $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 8x + 15}.$

8. $(2x - 1)(2x + 3)(3x - 2)(3x - 8) + 25 = 0.$

9*. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1.$

3.28. *Однородные уравнения.* Уравнение вида $au + bv = 0$ с неизвестными u и v называется однородным уравнением первой степени, $au^2 + buv + cv^2 = 0$ — однородным уравнением второй степени, $au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0$ — однородным уравнением третьей степени и т. д. Деля обе части однородного уравнения степени k на v^k, мы придем к уравнению с одним неизвестным $y = u/v$. Разумеется, отдельно должен быть рассмотрен случай $v = 0$. Следующие уравнения сводятся к однородным, если удачно ввести новые переменные u и v. Решите уравнения:

1. $(x^2 - x + 3)^2 - 3(x^2 - x + 3)(2x^2 - x + 2) + 2(2x^2 - x + 2)^2 = 0.$

2. $(x - 2)^2(x + 1)^2 - (x - 2)(x^2 - 1) - 2(x - 1)^2 = 0.$

3. $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} = 12\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2.$

3.29. *Возвратные уравнения.* Каждое из следующих уравнений можно решить, вводя подходящую замену переменной вида $y = ax + b/x$. Решите уравнения:

1. $4x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 3x + 4 = 0.$

2. $9x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 2x + 1 = 0.$

3. $18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0.$

4. $x^6 - 2x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$

3.30. *Теорема Безу.*

1. Докажите тождество

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

2. α — корень уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. Докажите, что левую часть уравнения можно представить в виде $(x - \alpha)\,g(x)$, где $g(x)$ — многочлен степени $n - 1$.

3.31. *Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.*

1. Несократимая дробь p/q является корнем уравнения $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. Докажите, что a_n делится на q, a_0 делится на p. Докажите, что левую часть этого уравнения можно разложить на множители с целыми коэффициентами, один из которых равен $qx - p$.

Решите уравнения:

2. $x^3 - 5x + 4 = 0$. 3. $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

4. $4x^3 + 3x - 2 = 0$.

5. $6x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 11x + 3 = 0$.

3.32. Решите уравнения:

1. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 33 = 0$.

2. $(x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4$.

3*. $(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x$.

3.33*. Для каждого значения a решите уравнение

$$x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 1)x - 2a + 2 = 0.$$

3.34. *Метод интервалов.* Многие функции, в частности, линейные и квадратные функции обладают следующим свойством: если нанести на числовую ось все корни такой функции, то ось разобьется на конечное число промежутков, внутри каждого из которых все значения функции — числа одного знака. Если функция $y = F(x)$ получена из таких функций с помощью операций умножения и деления, то, отметив на числовой оси корни всех сомножителей и выяснив знак $F(x)$ в одном из промежутков, мы сможем последовательно находить знаки $F(x)$ в остальных промежутках, выясняя каждый раз, сколько сомножителей изменило знак при переходе в очередной промежуток из предыдущего. Так мы можем решать неравенства $F(x) > 0$, $F(x) < 0$. Решите неравенства:

1. $\frac{2x-1}{x+5} > 0$. 2. $\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1$.

3. $(2x^2 - x - 1)(6 - 5x - x^2) > 0.$

4. $\frac{(3x^2 + x - 2)(x^2 - x)}{(3x - 2)(x^2 - x + 1)} \leqslant 0.$

5. $\frac{(4x^2 - 4x + 1)(2 - x - x^2)}{(x^2 - 4)(x + 3)} \geqslant 0.$

3.35. При решении неравенств можно использовать те же замены переменных, что и при решении уравнений. Решите неравенства:

1. $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0.$ 2. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} - \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} > \frac{3}{2}.$

3. $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3)(x - 1) \geqslant 2(x - 1)^2.$

4. $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 \geqslant 0.$

3.36. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 24, \\ 2x = 3y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{10}{x+2} + \frac{9}{y-1} = 5, \\ \frac{1}{x-1} = \frac{2}{y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ x + y^2 = 7. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x + xy = 3, \\ xy^2 + xy^3 = 12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x^2 - y^2)\,x = 6y, \\ \frac{x+y}{x^2 - xy} = \frac{3y}{2}. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + xy = 2x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 2x^4 + xy^3 + x^2y^2 - x^3y = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x(x + y + z) = 7, \\ y(x + y + z) = 14, \\ z(x + y + z) = 28. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x(y + z) = 27, \\ y(z + x) = 32, \\ z(x + y) = 35. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^3 = yz, \\ y^3 = zx, \\ z^3 = xy. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x^8 + \frac{1}{y^8} = y^8 + \frac{1}{x^8}, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

17*. $\begin{cases} x^4+y^4=2, \\ x^2y^2+1=2y^2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1}=z, \\ \dfrac{y}{z^2+1}=x, \\ \dfrac{z}{x^2+1}=y. \end{cases}$

19*. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

§ 5. Иррациональные уравнения и неравенства

3.37. *Возведение в квадрат.* Решите следующие уравнения:

1. $\sqrt{x^2+x-3}=3$. 2. $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{x+1}$.
3. $\sqrt{x+2}=x$. 4. $\sqrt{6-x-x^2}=x+1$.
5. $\sqrt{49-4x\sqrt{x^2-5}}=4x-7$.
6. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$.
7. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-8}$.
8*. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt[4]{x^2-2x+1}$.

3.38. *Замена переменной.* Решите уравнения:

1. $\sqrt{2-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$.
2. $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}}=1$.
3. $x^3\sqrt[6]{x^5}-5x^2\sqrt[12]{x}=6\sqrt[3]{x}$.
4. $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}-3}=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{3}+4$.
5*. $(x^2-2x)^3+x\sqrt{x(x-2)^3}=2$.
6. $4x^2+5x\sqrt{x+5}=44(x+5)$.
7*. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$.

3.39. *Уравнения с кубическими радикалами.*

1. Докажите тождество

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \\ =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

2. Докажите, что $a^3+b^3+c^3=3abc$ в том и только в том случае, если $a+b+c=0$ или $a=b=c$.

Решите уравнения:

3. $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$. 4. $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x-3}=1$.
5 $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$.

3.40. Каждое из следующих уравнений можно решить, подобрав корень и доказав, что других корней нет:

1. $\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=10.$
2. $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{17-x}.$
3. $\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^5-7}=8.$
4. $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}=2.$
5. $2\sqrt{6-x-x^2}+x=2\sqrt{x^2+25}-3.$

3.41. Решите неравенства:

1. $\sqrt{x^2+5x+5}>1.$ 2. $\sqrt{x^2-x-1}<1.$
3. $\sqrt{3x^2-5x-3}>\sqrt{2x+3}.$
4. $\sqrt{3x^2-2x-1}\geqslant 2x-2.$
5. $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-3}>3.$ 6. $x\sqrt{10-x^2}>x^2-6.$
7. $x\sqrt{3x^2+5x-6}<x^2+2x.$
8*. $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt{3}.$

Глава 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение тригонометрических функций

Окружность радиуса 1 с центром в начале координат будем называть *числовой окружностью*. Длина числовой окружности равна 2π. Представим себе точку, равномерно движущуюся по числовой окружности со скоростью, равной по величине 1. Предположим, что в момент времени $t=0$ эта точка имеет координаты (1; 0) и направление движения выбрано так, что в момент времени $t=\pi/2$ движущаяся точка имеет координаты (0; 1). (Если оси координат расположены, как на рис. 2, то точка вращается против часовой стрелки.) Этими условиями однозначно определяется положение точки в любой момент времени t. Обозначим это положение через $P(t)$.

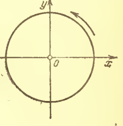


Рис. 2.

Абсцисса точки $P(t)$ называется *косинусом* числа t ($\cos t$), а ордината — *синусом* числа t ($\sin t$). Если $\cos t \neq 0$, то *тангенс* числа t ($\operatorname{tg} t$) — это отношение $\sin t/\cos t$, а если $\sin t \neq 0$, то *котангенс* числа t ($\operatorname{ctg} t$) — это отношение $\cos t/\sin t$.

4.1. Найдите координаты точек $P(\pi)$, $P(3\pi/2)$, $P(-\pi/2)$, $P(-\pi)$, $P(\pi/6)$, $P(\pi/4)$, $P(\pi/3)$, $P(-3\pi/4)$, $P(7\pi/6)$, $P(10\pi/3)$.

4.2. Изобразите на числовой окружности дугу, описываемую движущейся точкой в течение промежутков времени:

1. $[0;\ \pi/2]$. 2. $(-\pi/4;\ \pi]$. 3. $[-\pi/2;\ 3\pi/2)$.
4. $[1;\ +\infty)$. 5. $(2;\ 9)$.

4.3. Отметьте на числовой окружности положения, которые занимает движущаяся точка в моменты времени:

1. $t = \pi k/2$, где k — целое число,
2. $t = \pi/4 + \pi k$, где k — целое число,
3. $t = \pi k/6$, где k — целое число,
4. $t = -\pi/2 + \pi k/4$, где k — целое число.

4.4. Дано вещественное число t_0 и на числовой окружности отмечены точка $A = P(t_0)$, точка B, симметричная A относительно оси ординат; точка C, симметричная A относительно начала координат, и точка D, симметричная A относительно оси абсцисс. Найдите все значения t, для которых справедливы утверждения:

1. $P(t) = A$. 2. $P(t) = C$.
3. $P(t) = D$. 4. $P(t) = B$.
5. Точка $P(t)$ лежит на прямой AC.
6. Точка $P(t)$ лежит на дуге AB.
7. Точка $P(t)$ лежит на дуге CAB.

4.5. На числовой окружности отмечены точка $A(\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)$ и точка $B(-1;\ 0)$. Найдите все значения t, для которых точка $P(2t)$ лежит на дуге AB.

4.6*. Используя иррациональность числа π, докажите, что на любой дуге числовой окружности есть бесконечно много точек вида $P(n)$, где n — целое число.

4.7. Для каждого из следующих чисел выясните, положительно оно, отрицательно или равно нулю:

1. $\sin\frac{\pi}{7}$. 2. $\cos\frac{5\pi}{11}$. 3. $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{9}$.

4. $\cos\frac{11\pi}{2}$. 5. $\sin\sqrt{\pi}$. 6. $\operatorname{ctg}\frac{13}{7}$.

7. $\sin 3{,}14$. 8. $\operatorname{tg}\frac{7}{3}$. 9. $\cos 12$.

10. $\cos(\sin 2)$. 11. $\operatorname{tg}(\cos 1)$.

4.8. Какое из чисел больше:

1. $\sin 1$ или $\cos 10$? 2. $\sin 1$ или $\operatorname{tg} 2$?

3. $\sin 3$ или $\operatorname{tg} 3$? 4. $\sin 1 + \cos 1$ или 1?

4.9. Расположите в порядке возрастания числа:

1. $\sin 1$, $\cos 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\sin 5$, $\cos 6$, $\sin 7$, $\cos 8$.

2*. $\operatorname{tg} 1$, $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 4$, $\operatorname{tg} 5$, $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{tg} 7$, $\operatorname{ctg} 8$.

4.10. Для решения следующих уравнений и неравенств не нужны формулы тригонометрии — достаточно знать лишь определение синуса и косинуса.

1. $\sin t = 0$. 2. $\sin t = 1$.

3. $\cos t = -1$. 4. $\sin t = \cos t$.

5. $|\sin t| = |\cos t|$. 6. $\sin t = 1/2$.

7. $\cos t = -\sqrt{2}/2$. 8. $\sin t + \cos t = 1$.

9. $\sin t = \sqrt{2} + \cos t$. 10. $\sin t \leqslant 0$.

11. $\cos t > 0$. 12. $\cos t > \frac{1}{2}$.

13. $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\sin t > \cos t$.

15. $\sin t - \cos t \geqslant 1$. 16. $\frac{1}{\sin t} < 2$.

17. $\frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} \geqslant 1$.

4.11. В этой задаче, как и в предыдущей, можно обойтись без формул тригонометрии. Докажите утверждения:

1. $\sin 10° > \frac{1}{6}$. 2. $\sin 6° > \frac{1}{10}$.

3. Если натуральное число $n \geqslant 2$ и вещественное число α таковы, что $0 < n\alpha < \pi/2$, то $\sin n\alpha < n \sin\alpha$.

4.12. Сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулевому вектору. Эту геометрическую теорему можно использовать при

доказательстве следующих равенств:

1. $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\ldots$

$$\ldots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=-1$$

(n — натуральное число).

2. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-{}^1/_2$.

3. $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ={}^1/_2$.

4. $\cos 20^\circ=\cos 40^\circ+\cos 80^\circ$.

4.13. Непосредственно из определения тригонометрических функций вытекают тождества: $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, $1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $1+\mathrm{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$, $\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{ctg}\,t=1$. Эти тождества позволяют выражать значения одних тригонометрических функций через другие.

1. Найдите $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha=-{}^1/_6$, $\sin\alpha<\cos\alpha$.

2. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha=-{}^8/_{15}$, $\sin\alpha>\cos\alpha$.

3. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{2}$; $\alpha\in(0;\ \pi)$.

4. Найдите $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha={}^5/_{13}$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right]$.

5. Найдите $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha=3$.

6. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha={}^6/_5$.

7. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha={}^1/_2$.

8. Найдите $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha={}^2/_5$.

9. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha\in[5;\ 6]$.

10. Найдите $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=5-8\sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha\in(0;\ 1)$.

4.14. Из простейших соотношений между тригонометрическими функциями (см. задачу 4.13) можно вывести немало любопытных тождеств. Некоторые из них вы получите, упростив следующие выражения:

1. $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

2. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

3. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$.

4. $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

5. $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$.

6. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$.

7. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

8. $\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right)$.

9. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

10. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

11. $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.

12. $\sin^2\alpha\,(2+\operatorname{ctg}\alpha)\,(2\operatorname{ctg}\alpha + 1) - 5\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

4.15. Докажите тождества:

1. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

2. $\cos\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)\,(\sin\alpha+\cos\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

3. $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

4. $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

5. $\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}$.

6. $\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$.

7. $3\sin^4\alpha - 2\sin^6\alpha = 1 - 3\cos^4\alpha + 2\cos^6\alpha$.

4.16. Символом $\sqrt{a}$ обозначается неотрицательный корень из неотрицательного числа a. Это следует иметь в виду, упрощая следующие выражения:

1. $\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ (\alpha\in[0;\pi])$.

2. $\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ (\alpha\in[\pi;2\pi])$.

3. $\sqrt{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}$.

4. $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\ \left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\right)$.

5. $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}\left(\alpha\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]\right)$.

6. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-2}\ \left(\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

7. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\quad\left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\right)$.

4.17. *Формулы приведения.* Так называют группу формул, основанных на симметрии числовой окружности относительно координатных осей и прямых $y=x$, $y=-x$ и сводящих вычисление тригонометрических функций аргумента вида $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, где n — целое число, к тригонометрическим функциям аргумента α.

1. Вычислите: $\sin 135°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\cos 1110°$, $\sin\frac{7\pi}{3}$, $\cos\frac{13\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$.

2. Упростите:

$$\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2.$$

3. Упростите:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\sin(2\pi-\alpha)(\sin^2(\pi+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha))}.$$

§ 2. Теоремы сложения

Теоремами сложения называют формулы:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Из теорем сложения вытекает большое число тригонометрических формул, из которых мы отметим следующие:

1) *формулы двойного аргумента*:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

2) *формулы половинного аргумента*:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

3) *формулы преобразования произведения в сумму*:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

4) *формулы преобразования суммы в произведение*:

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

4.18. Найдите значения следующих выражений:

1. $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ$.
2. $\cos 76^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \sin 16^\circ$.
3. $\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ$.
4. $\sin 64^\circ \sin 34^\circ - \sin 56^\circ \cos 116^\circ$.
5. $\dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1-\operatorname{ctg} 65^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ}$.
6. $\dfrac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{ctg} 48^\circ}{1+\operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{ctg} 18^\circ}$.
7. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.
8. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$.
9. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.
10. $\dfrac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.
11. $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$.

12. $\sin 20^\circ + 2\sin^2 35^\circ$.

13. $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$. 14. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

15. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$. 16. $\cos \frac{\pi}{5}$.

4.19. Теоремы сложения и их следствия значительно расширяют возможности вычисления значений тригонометрических функций.

1. Найдите $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$.

2. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

3. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

4. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

5. Найдите $\sin\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{12}{13}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

6. Найдите $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$, если $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{5}$.

8. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha + \sin\beta = 1$, $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$.

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4$, $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

4.20. Упростите выражения:

1. $\sin 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 2\alpha$.

2. $\cos 5\alpha \cos 3\alpha + \sin 5\alpha \sin 3\alpha$.

3. $\frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta}$. 4. $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

5. $\sin^3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos^3\alpha$.

6. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$.

4.21. Докажите тождества:

1. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

2. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + \ldots + 2^n \operatorname{tg} 2^n\alpha =$
$$= \operatorname{ctg}\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg} 2^{n+1}\alpha.$$

4. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$. 5. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$.

6. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 7. $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

8. $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

9. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \operatorname{tg} 3\alpha$.

10. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

11. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha =$
$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

12. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha =$
$$= \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

13*. $\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \ldots$
$$\ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

4.22. Содержание этой задачи составляют условные тождества, т. е. утверждения, устанавливающие, что одно соотношение является следствием другого.

1. Если $3\sin\alpha = \sin(2\beta + \alpha)$, $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$,
$$\cos\beta \neq 0, \text{ то } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\beta.$$

2. Если $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha + \cos\beta \neq 0$, то
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

3. Если $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1+\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$, то $\sin(3\alpha+\beta) = 7\sin(\alpha-\beta)$.

4. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

5. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

6. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

7. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos\gamma\neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

8. Если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos\gamma\neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1$.

4.23. Условные тригонометрические тождества иногда удобно формулировать как свойства углов треугольника.

1. Докажите утверждение, что треугольник ABC является остроугольным в том и только в том случае, если $0<\operatorname{ctg}\hat{A}\cdot\operatorname{ctg}\hat{B}<1$.

2. Углы треугольника ABC таковы, что $\sin 3\hat{A}+\sin 3\hat{B}+\sin 3\hat{C}=0$. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен по величине $60°$.

3. Углы треугольника ABC таковы, что

$$\sin\hat{A} = \frac{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\cos\hat{B}+\cos\hat{C}}.$$

Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

4. Углы треугольника ABC таковы, что $\sin\hat{A} = 4\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

5*. Углы треугольника ABC таковы, что $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}={}^3/_2$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

§ 3. Обратные тригонометрические функции

Если числа a и b таковы, что $a=\sin b$ и $b\in[-\pi/2;\ \pi/2]$, то число b называется *арксинусом* числа a ($b=\arcsin a$); если числа a и b таковы, что $a=\cos b$ и $b\in[0;\ \pi]$, то число b называется *арккосинусом* числа a

($b = \arccos a$); если числа a и b таковы, что $a = \operatorname{tg} b$ и $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то число b называется *арктангенсом* числа a ($b = \operatorname{arctg} a$); если числа a и b таковы, что $a = \operatorname{ctg} b$ и $b \in (0; \pi)$, то число b называется *арккотангенсом* числа a ($b = \operatorname{arcctg} a$). Этими условиями однозначно определены обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ на промежутке $[-1; 1]$ и $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ на всей числовой оси. Отметим несколько простых соотношений для обратных тригонометрических функций: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

4.24. Вычислите $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arccos(-1)$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$, $\operatorname{arcctg} 0$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.25. Найдите значения следующих выражений:

1. $\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{3}$.
2. $\arccos\frac{1}{7} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$.
3. $\arcsin\frac{2}{3} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.
4. $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.
5. $\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) - \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2})$.

4.26. Постройте графики функций:

1. $y = \arcsin x + \arccos x$. 2. $y = \sin(\arcsin x)$.
3. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. 4. $y = \cos\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$.
5. $y = \sin(\arccos x)$. 6. $y = \arcsin(\sin x)$.
7. $y = \arcsin(\cos x)$. 8. $y = \arccos(\cos\sqrt{16 - x^2})$.

4.27. Докажите, что для любого значения x из промежутка $[-1; 1]$ справедливы неравенства

1. $\arcsin x \cdot \arccos x \leqslant \frac{\pi^2}{16}$.
2. $\operatorname{arctg}(\arcsin x) < \operatorname{arcctg}(\arccos x)$.

§ 4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Если $|a| \leqslant 1$, то все решения уравнения $\sin x = a$ задаются формулами $x = \arcsin a + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. Для $a = 1$ лучше пользоваться формулой $x = \pi/2 + 2\pi k$, для $a = -1$ — формулой $x = -\pi/2 + 2\pi k$, для $a = 0$ — формулой $x = \pi k$.

Если $|a| \leqslant 1$, то все решения уравнения $\cos x = a$ задаются формулами $x = \arccos a + 2\pi k$, $x = -\arccos a + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. Для $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$ лучше использовать формулы $x = 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pi/2 + \pi k$ соответственно. Если $|a| > 1$, то уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$ корней не имеют.

Для любого значения a все решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ задаются формулами $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$ (k — произвольное целое число) соответственно.

4.28. *Замена переменной.* Решите уравнения:

1. $3\sin^2 x - 2\sin x = 1$. 2. $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$.
3. $2\cos 2x = 8\cos x - 1$. 4. $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.
5. $6\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x + 6 = 0$. 6. $2\sin x + 3\cos x = 0$.
7. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$.
8. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6$.
9. $(\sin x + \cos x)^3 = 4\sin x$. 10. $2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = \cos x$.
11. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + 2\sin 2x$.
12. $\sin x + \cos x = \sin 2x$.
13. $\sin x\cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.
14. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 1$. 15. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.
16. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

4.29. Докажите, что при $a > 0$ верна формула
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$
Решите уравнения:

1. $\sin x + \cos x = -1$. 2. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.
3. $3\sin x + 4\cos x = \frac{5}{2}$.

4.30. *Разложение на множители.*

1. $\sin 7x = \sin 15x$. 2. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$. 4. $\cos 3x = \sin 10x$.

5. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

6. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 3/2$.

7. $\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 6x + \sin^2 7x = 2$.

8. $\sin 2x \cos 4x = \sin 7x \cos 9x$.

9. $\cos 2x \cos 8x + \cos x \cos 3x + \cos 2x \cos 10x = 0$.

10. $\cos^3 x \cos 2x - \sin^3 x \sin 2x = \cos x - 1/4 \sin x$.

11. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1$. 12. $\cos 2x = \cos x + \sin x$.

13. $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$.

14. $5 \sin x + 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$.

15. $24 \sin 3x + 15 \cos 5x = 20 \sin 5x + 7 \cos 3x$.

16. $\sin 2x (\sqrt{3} + \cos x) = \sin x (4 + 2 \sin^2 x)$.

17. $2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x$.

4.31. Уравнения, предлагаемые в этой задаче, можно решить, сравнив области значений левой и правой частей:

1. $3 \sin^7 x + 4 \cos^{10} x = 7$. 2. $\sin^5 x + \cos^{11} x = \frac{\pi}{3}$.

3. $\sin x + \cos 4x + 2 \sin 5x = 4$.

4. $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

5. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2} (\sin x + \cos x)$.

6. $\cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \sin 3x - 1$.

7. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{2}$.

4.32. Решите уравнения:

1. $\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1 + x + x^2} = \sqrt{3}$. 2. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

3*. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$.

4.33. *Системы тригонометрических уравнений.* Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin^3 x + \cos^3 y + 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^4 x + \sin^4 y. \end{cases}$

4.34. *Тригонометрические неравенства.* Решите неравенства:

1. $\cos 2x \geqslant \sin x$. 2. $\sin 5x > 16 \sin^5 x$.

3. $3 \sin 2x \leqslant 1 + 2 \operatorname{tg} x$. 4. $\cos 2x > \cos x - \sin x$.

5. $\dfrac{\cos x (1 - 2 \sin x)}{\cos x - \sin x} \leqslant 0$.

6. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 3x \geqslant 2$.

§ 5. Исследование тригонометрических функций

Число T называется *периодом* функции $y = f(x)$, если для любого числа x из области определения этой функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период, отличный от нуля, называется *периодической*.

Периоды функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ задаются формулой $T = 2\pi k$, а периоды функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — формулой $T = \pi k$, где k — произвольное целое число.

4.35. Найдите области значений функций:

1. $y = 1 + 2 \sin 5x$. 2. $y = \sin x + \cos x$.

3. $y = 3 \sin x - 4 \cos x - 1$. 4. $y = \sin^2 x + \sin 2x$.

5. $y = \cos x + \cos 2x$. 6. $y = \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x)$.

4.36. Какие из следующих функций периодичны?

1. $y = \sin \sqrt{|x|}$. 2. $y = |\sin (x + \pi/3)|$.

3. $y = \sin |x|$. 4. $y = \cos |x|$.

5. $y = \sin (\sin x)$. 6*. $y = \cos x \cos (x\sqrt{2})$.

4.37. Найдите все периоды функций:

1. $y = \sin 3x$. 2. $y = \operatorname{tg}(4x + \pi/6)$.

3. $y = \sin^2 x$. 4. $y = \cos 2x + \sin 3x$.

5. $y = \cos (\sin (\cos x))$.

4.38. Кривая, которая в некоторой системе координат задается формулой вида $y = A \sin \omega x$, где A, ω — вещественные числа, отличные от нуля, называется *синусо-*

идой, число $|A|$ называется *амплитудой* этой синусоиды, $|\omega|$ — *частотой*. Докажите, что $T = 2\pi/\omega$ — период функции $y = A\sin\omega x$. Докажите, что графики следующих функций — синусоиды и постройте их.

1. $y = \cos x$. 2. $y = 2\sin(\pi/6 - 3x)$.

3. $y = \cos x + \sin x$. 4. $y = \sin^2 x$.

5. $y = 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x$.

4.39. Постройте графики функций:

1. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. 2. $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin x$.

3. $y = \sin x\,|\cos x|$.

4.40. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $\sin(x + y) = 0$. 2. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.

3. $y = |y - \sin x|$. 4. $\sin x \leqslant \cos y$.

5*. $x^2 + 1 \leqslant 2x\sin(x + y)$.

4.41. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа $(n \geqslant 2)$. Докажите, что $|\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n + \cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n| \leqslant 1$.

4.42. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$ $(n \geqslant 2)$. Докажите, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

Глава 5

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Вычисление производных

5.1. *Основные формулы вычисления производных.* Производные суммы, разности, произведения, частного дифференцируемых функций вычисляются по формулам: $(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$; $(\alpha u)' = \alpha u'$ (α — число); $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$y = a$ (постоянная функция)	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Вычислите производные следующих функций:

1. $y = 3 - 2x$.
2. $y = 2x - x^2$.
3. $y = (x+2)^3$.
4. $y = \frac{5}{x^5}$.
5. $y = \sqrt[3]{x}$.
6. $y = x^2 \sqrt[4]{x^3}$.
7. $y = (x^2 + x)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})$.
8. $y = \cos x - \operatorname{tg} x$.
9. $y = x^2 \operatorname{ctg} x$.
10. $y = \frac{\sin x}{x}$.
11. $y = x + \arcsin x$.
12. $y = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$.
13. $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

5.2. *Производная сложной функции.* Производная сложной функции $y = g(f(x))$ вычисляется по формуле $y' = g'(f(x)) f'(x)$. В частности, если $u(x)$ — дифференцируема, то основные формулы вычисления производных обобщаются следующим образом:

если $y = u^n(x)$, то $y' = nu^{n-1}(x)\, u'(x)$;

если $y = \sin u(x)$, то $y' = \cos u(x) \cdot u'(x)$;

если $y = \operatorname{tg} u(x)$, то $y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ и т. д.

Вычислите производные следующих функций:

1. $y = \sin 2x$. 2. $y = (x+1)^{50}$.
3. $y = \sqrt{1-3x}$. 4. $y = \sqrt[4]{(2x^3 - x^2)^3}$.
5. $y = \frac{1}{\cos^3 x}$. 6. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 2x}$.
7. $y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$. 8. $y = \frac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$.

5.3. *Производная в точке.*

1. Вычислите $f'\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \sqrt{1+5x}$.

2. Вычислите $f'(\sqrt{2})$, если $f(x) = x^3 \arcsin \frac{1}{x}$.

3. Вычислите $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$, если $f(x) = x^3(x-2)^2(x-3)$.

4. Вычислите величину производной $f'(5)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-10)$.

5. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$.

5.4. *Приближенные вычисления.* Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то при малых Δx ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно вычислять по приближенной формуле $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$. Вычислите приближенно:

1. $2{,}01^3$. 2. $9{,}998^8$.
3. $\sqrt[4]{1{,}04}$. 4. $\frac{2}{1{,}002^3}$.
5. $\sin 31°$. 6. $\operatorname{tg} 43°$.
7. $\operatorname{arctg} 1{,}01$. 8. $\sqrt[5]{\frac{1{,}98}{2{,}02}}$.

§ 2. Касательная

5.5. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то касательная к графику этой функции в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$ имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$ и задается уравнением $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

1. Какие углы образуют с осью абсцисс касательные к параболе $y = \frac{3 + 2x - x^2}{4}$ в точках с абсциссами -1; 1; 3?

2. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 - x + \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой 1.

3. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^5 + 3x + 2$ в точке с ординатой 2.

4. В каких точках касательная к параболе $y = x^2$ параллельна прямой $y = 4x - 5$; перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$; образует с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол в 45°?

5. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 3x - 2$ в точке с абсциссой 0?

6. При каких a, b, c график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ касается прямой $y = 4x + 4$ в точке с абсциссой -1 и пересекает эту прямую в точке с абсциссой 2?

5.6. *Касательные к параболе.*

1. Докажите, что касательная к графику квадратной функции имеет с ним только одну общую точку.

2. Докажите, что прямая, не параллельная оси ординат и имеющая с графиком квадратной функции только одну общую точку, является касательной к этому графику.

3. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$?

4. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2$, проходящих через точку (2; 3).

5. Докажите, что абсцисса точки пересечения двух касательных к графику квадратной функции равна полусумме абсцисс точек касания.

6. Докажите, что любая касательная к параболе $y = x^2$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания параллельно оси ординат, а другая проходит через точку касания и точку (0; $^1/_4$) (фокус параболы, см. 3.4).

7. Докажите, что любая касательная к параболе $y = x^2$ пересекает прямые $y = {^1/_4}$ и $y = -{^1/_4}$ в точках, равноудаленных от точки (0; $^1/_4$).

8. Докажите, что две касательные к параболе $y = x^2$, проведенные из произвольной точки прямой $y = -{^1/_4}$, взаимно перпендикулярны.

9. Докажите, что если две касательные к параболе $y = x^2$ взаимно перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой $y = -1/4$.

10. Через произвольную точку оси абсцисс проведены две прямые, одна из которых касается параболы $y = x^2$ (и не совпадает с осью абсцисс), а другая проходит через точку $(0; 1/4)$. Докажите, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

11. Обобщите утверждения задач 6—10 на произвольную параболу.

5.7. *Касательные к гиперболе.*

1. Докажите, что касательная к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ имеет с ней только одну общую точку.

2. Докажите, что прямая, не параллельная осям координат и имеющая с гиперболой $y=\frac{1}{x}$ только одну общую точку, является касательной к этой гиперболе.

3. Докажите, что любая касательная к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания и точку $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, а другая — через точку касания и точку $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

4. Докажите, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

5. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного осями координат и произвольной касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, равна 2.

6. Докажите, что произведение расстояний от точек $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ до произвольной касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ равно 2.

§ 3. Монотонность. Экстремумы

Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *возрастает* (*строго возрастает*; *убывает*; *строго убывает*) на промежутке, если для любых двух чисел x_1, x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 > x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$; $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными*. Если $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, то она возрастает (убывает) на промежутке в том и только в том случае, если во всех точках этого промежутка выполнено неравенство $y' \geqslant 0$ ($y' \leqslant 0$). Эта монотонная функция строго монотонна в том и только в том случае, если нет такого промежутка, все точки которого удовлетворяют уравнению $y' = 0$. (В частности, это условие выполнено, если производная y' вовсе не имеет корней или имеет конечное число корней.)

5.8. Для каждой из следующих функций укажите промежутки строгой монотонности.

1. $y = x^3 + x$.
2. $y = 3x - x^3$.
3. $y = (x-1)^5(2x+3)^4$.
4. $y = x + \frac{1}{x}$.
5. $y = x - \frac{1}{x}$.
6. $y = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$.
7. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$.
8. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.
9. $y = \operatorname{tg} x - 2x$.

5.9. Функция задана формулой $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c — вещественные числа). Докажите, что найдутся такие числа α и β, что эта функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; \alpha]$, $[\beta; +\infty)$.

5.10. Зная промежутки монотонности функции, нетрудно найти ее наибольшее значение и наименьшее значение.

1. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 1$, если $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 1$, если $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, если $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 4x^3 - x^4$, если $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = [6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 1]$, если $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

6. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{2x^2 - 9x - 2}{x^2 - 5x - 6}$, если $0 \leqslant x \leqslant 5$.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{7x^2 - 8}{x^2 + x + 1}$, если $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{2x-4} + \sqrt{5-x}$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$, если $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos 2x - x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x \sin 2x$.

12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} 2x^2 - x^3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 8x - x^2, & \text{если } 3 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^3 - 1| - |x^2 - 2x| - x$, если $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

14. Найдите наименьший член последовательности $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$.

15. Найдите наибольший и наименьший члены последовательности $a_n = \frac{n-12}{2n^2-n+7}$.

16. Докажите, что если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то $|x^3 + 2x + 1| \leqslant 2$.

17. Докажите, что если $-2 \leqslant x \leqslant 2$, то $3x^5 - 5x^3 - 30x < 40$.

18. Докажите, что если $-2 \leqslant x \leqslant 2$, то $|x^3 - 3x| \leqslant 2$.

19. Докажите, что если $-2 \leqslant x \leqslant -1$, то $7 \leqslant x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x \leqslant 38$.

20. Докажите, что если $x < -1$, то $\frac{3x^2-5}{x^3+1} \geqslant -1$.

21. Докажите, что если $0 < x < \pi/2$, то $\sin x > 2x/\pi$.

5.11. Каждую из следующих задач можно свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

1. Какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от начала координат до точек пересечения координатных осей с прямой, имеющей положительный угловой коэффициент и проходящей через точку $(-1; 2)$?

2. Какое наименьшее значение может принимать произведение расстояний от начала координат до точек пересечения координатных осей с прямой, имеющей отрица-

тельный угловой коэффициент и проходящей через точку (2; 1)?

3. Найдите точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке (—1; 2).

4*. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ определена на открытом промежутке. Точка A не лежит на графике $y = f(x)$, B — ближайшая к A точка графика функции $y = f(x)$, l — касательная к графику в точке B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна l.

5. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов расстояний от точки (2; 2) до двух точек параболы $y = x^2$, симметричных относительно оси ординат?

6. Какое наименьшее значение может принимать расстояние между такими двумя точками A и B параболы $y = x^2$, что прямая AB перпендикулярна касательной к параболе в точке A?

7. Какую высоту имеет прямоугольник наибольшей площади, вписанный в сегмент круга радиуса R, если высота сегмента равна H? (Основание прямоугольника лежит на основании сегмента.)

8. *Параболическим сегментом* называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной ее оси. Расстояние от вершины параболы до этой прямой называется *высотой* сегмента, а длина отрезка прямой, высекаемого параболой — *основанием* сегмента. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в параболический сегмент с основанием a и высотой H? (Одна из сторон прямоугольника параллельна оси параболы.)

9. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в круговой сектор радиуса R с центральным углом α? (Одна из сторон прямоугольника параллельна оси симметрии сектора.)

10. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны a?

11. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр, если его объем равен V?

12. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь это тело, если его объем равен V?

13. Докажите, что объем шара, вписанного в конус, не превосходит половины объема этого конуса.

14. Какой сектор надо вырезать из данного круга, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

15. Определите радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности. Чему равна площадь боковой поверхности этого цилиндра?

16. Определите высоту конуса, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь поверхности.

17. Правильная четырехугольная призма и правильная четырехугольная пирамида расположены так, что одно из оснований призмы лежит в основании пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Какой наименьший объем может иметь пирамида, если сторона основания призмы равна a, а боковое ребро равно $2a$?

18. Дождевая капля, начальная масса которой равна m (г), а начальная скорость равна нулю, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что масса уменьшается пропорционально времени (коэффициент пропорциональности равен k (г/с)). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

19. Из пункта A, находящего в лесу в 5 км от прямолинейной дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от пункта A. По дороге пешеход может двигаться с максимальной скоростью 5 км/ч, а по лесу — с максимальной скоростью 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться из пункта A в пункт B?

5.12. *Доказательство неравенств.* Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на промежутке $[a; +\infty)$. Докажите, что, если $f(a) \geqslant g(a)$ и при всех x, больших a, справедливо неравенство $f'(x) > g'(x)$, то при всех x, больших a, справедливо неравенство $f(x) > g(x)$. Докажите неравенства:

1. Если $x > 0$, то $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

2. Если $x > 0$, то $1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} < \sqrt[n]{1+x} <$ $< 1 + \frac{x}{n}$ (n — натуральное число).

3. Если $x > 0$, то $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

4. Если $x > 0$, то $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

5. Если $0 < x < \pi/2$, то $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$.

6. Если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\alpha \sin \beta < \beta \sin \alpha$.

7. Если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\alpha \operatorname{tg} \beta > \beta \operatorname{tg} \alpha$.

5.13. *Построение графиков.* Постройте графики функций:

1. $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2$. 2. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$. 4. $y = x^3 - 6x + 6 \operatorname{arctg} x$.

5. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

5.14. *Число корней уравнения.* Для того, чтобы найти число корней уравнения $f(x) = 0$, часто бывает достаточно представить себе график функции $y = f(x)$.

Выясните, сколько корней имеют уравнения:

1. $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$. 2. $x^3 - x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. $12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

4. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x - \frac{2}{3}} = 1$.

5. $6 \operatorname{arctg} x - x^3 = \frac{3}{2}\pi - 1$.

6. Сколько корней на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет уравнение $3 \sin x + 2 \cos^3 x = 2{,}5$?

7. Сколько корней на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение $\cos 2x + \operatorname{tg} 3x = 5$?

Для каждого значения a выясните, сколько корней имеют следующие уравнения:

8. $3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + a = 0$.

9. $x^5 - x^3 - 2x + a = 0$.

10. $2x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + 1 = 0$.

11. $\sin 2x + 2 \sin x = a$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

5.15. *Число корней кубического уравнения.* Кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ сводится подстановкой $x = y - \frac{a}{3}$ к уравнению вида $y^3 + py + q = 0$.

1. Докажите, что, если $4p^3 + 27q^2 > 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет один корень.

2. Докажите, что если $4p^3 + 27q^2 = 0$, а из коэффициентов p, q хотя бы один отличен от нуля, то уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет два корня.

3. Докажите, что если $4p^3 + 27q^2 < 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три корня.

5.16*. Найдите все значения a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = x^3 - ax$ на отрезке [0; 1] равна 2.

5.17*. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $y = x^3 + ax^2 - 1$ на отрезке [0; 1] равно наибольшему значению ее на отрезке [1; 3].

5.18*. Найдите все значения a, при которых область значений функции $y = \sin x\,(a - \cos 2x)$ содержится в отрезке [−1; 1].

Глава 6

ИНТЕГРАЛ

§ 1. Вычисление интегралов

6.1. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если функция $y = F(x)$ имеет в каждой точке отрезка $[a; b]$ производную $F'(x) = f(x)$. Если $y = F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$, то любая другая первообразная этой функции имеет вид $y = F(x) + c$, где c — вещественное число.

Если интегрируемая функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ первообразную $y = F(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Отметим несколько свойств интеграла:

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (\alpha \text{ — число});$$

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Таблица первообразных*)

Функция	Первообразная
$y = a$ (a — число)	$y = ax$
$y = x^n$ $(n \neq -1)$	$y = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$
$y = \cos x$	$y = \sin x$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\operatorname{ctg} x$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} x$
$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$

*) Для каждой из функций, приведенных в левом столбце таблицы, в правом столбце помещена одна из ее первообразных.

Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{5} 5\,dx$.

2. $\int_{1}^{4} (3-2x)\,dx$.

3. $\int_{0}^{2} (2x^3 - x - 1)\,dx$.

4. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{3x^6}$.

5. $\int_{2}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

6. $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^5}\,dx$.

7. $\int_{1}^{2} \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^5}\,dx$.

8. $\int_{1}^{3} \frac{2x^2 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

9. $\int_{0}^{1} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx$.

10. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

11. $\int_0^{\pi}(\sin x - 3\cos x - x)\,dx$. 12. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

13. $\int_{-1}^{1}(|2x-1|-|x|)^2 dx$. 14. $\int_0^{\pi}|\sin x - \cos x|\,dx$.

6.2. *Линейная замена переменной.* Линейная замена переменной в интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx,$$

где α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$.

Вычислите интегралы:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx$.
2. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x}\,dx$.
3. $\int_0^{1}(3x+1)^7\,dx$.
4. $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\cos 5x\,dx$.
5. $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$.
6. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.
7. $\int_0^{2}\frac{dx}{x^2+4}$.
8. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2x^2+2x+1}$.
9. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.
10. $\int_{1/2}^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.
11. $\int_1^{3}\sqrt[3]{2x-|x-2|}\,dx$.
12. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$.

6.3. Используя линейную замену переменной, докажите следующие утверждения:

1. Если $y = f(x)$ — нечетная интегрируемая на отрезке $[-a;\,a]$ функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

2. Если $y = f(x)$ — четная интегрируемая на отрезке $[-a;\,a]$ функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$.

3. Если $y = f(x)$ — периодическая функция, определенная на всей числовой оси и интегрируемая на любом отрезке, T — ее период, то для любых чисел a и b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

не зависит от a. Если при этом график функции $y = f(x)$ симметричен относительно какой-нибудь точки оси абсцисс, то $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$.

6.4. *Общая формула замены переменной.* Следующая формула обобщает формулу линейной замены переменной:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

Вычислите интегралы:

1. $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$. 2. $\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{16}}\,dx$.

3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$. 4. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

5. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$. 6*. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

6.5. *Теорема о среднем.* Если m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции f на отрезке $[a;\ b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Более точную оценку для $\int_a^b f(x)\,dx$ можно получить, разбив отрезок $[a;\ b]$ на несколько меньших отрезков и применив теорему о среднем к каждому из них. Докажите неравенства:

1. $9 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2}\,dx < 9{,}5$. 2. $0{,}6 < \int_{1/2}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx < 0{,}75$.

3. $\int\limits_0^{10} \frac{x}{x^3+16}\,dx < \frac{5}{6}$. 4. $3 < \int\limits_0^{2} \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx < 5$.

5. $8 < \int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 10$. 6. $8,25 < \int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9,25$.

7. $\frac{\pi}{2} < \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx < \pi$.

8. $\frac{7\pi}{12} < \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx < \frac{5\pi}{6}$.

6.6*. Докажите, что если среди чисел a, b, c хотя бы одно отлично от нуля, то функция $y = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

6.7. *Интеграл с переменным верхним пределом.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ (в частности, если эта функция имеет производную в каждой точке отрезка $[a;\ b]$), то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, т. е. при всех $x \in [a;\ b]$ имеет место равенство $F'(x) = f(x)$.

1. $F(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$. Найдите $F'(0), F'(\pi), F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $F(x) = \int\limits_x^{x+1} \frac{t}{1+\sin^2 t}\,dt$. Найдите $F'(0), F'(\pi), F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. $F(x) = \int\limits_0^{x^2+1} \sqrt[3]{1+t^4}\,dt$. Найдите $F'(x)$.

4. $F(x) = \int\limits_0^{x^4} \frac{1}{t^4+1}\,dt$. Найдите промежутки монотонности функции $y = F(x)$.

5. $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+t^2}\,dt$. При каких значениях x функция $y = F(x)$ принимает свое наибольшее значение?

§ 2. Приложения интеграла

6.8. *Вычисление площадей*. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и все ее значения на этом отрезке неотрицательны, то площадь подграфика этой функции, т. е. фигуры, задаваемой условиями $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$ и во всех точках этого отрезка выполнено неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то площадь фигуры, задаваемой условиями $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, равна $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Найдите площади фигур, задаваемых следующими условиями:

1. $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1 + x^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x. \end{cases}$

4. $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.

5. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \arcsin x \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

6. $x^2 - x - 5 \leqslant y \leqslant x - 2$.

7. $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ x \geqslant y^2. \end{cases}$

8. $x^2 - \pi x \leqslant y \leqslant \sin x$.

9. $\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{x^2}, \\ 0 < x \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$

10. $|x - 1| \leqslant y \leqslant 1 + 2x - x^2$.

11. Докажите, что площадь параболического сегмента (см. п. 8 задачи 5.11) с основанием a и высотой h равна $\frac{2}{3}ah$.

12. Парабола $y = x^2 - x - 2$ касается сторон некоторого угла в точках с абсциссами -1 и 3. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек этого угла, координаты которых удовлетворяют условию $y \leqslant x^2 - x - 2$.

13. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается сторон угла. Докажите, что прямая, проходящая через вершину угла и перпендикулярная оси абсцисс, разбивает на две равновеликие части фигуру, состоящую из всех точек угла,

координаты которых удовлетворяют условию $y \leqslant ax^2 + bx + c$.

6.9. *Максимум и минимум площади.*

1*. Через точку, лежащую на параболе $y = x^2$, проводится прямая $y = ax + b$, перпендикулярная касательной к параболе в этой точке. Какую наименьшую площадь может иметь фигура, задаваемая условием $x^2 \leqslant y \leqslant ax + b$?

2. При каком положительном a площадь фигуры, задаваемой условием

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 2a, \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{6}{x^2} + x, \end{cases}$$

принимает наименьшее возможное значение?

3*. Точка A с координатами $(x_0; y_0)$ такова, что $y_0 > x_0^2$. Для каждого вещественного числа a через $S(a)$ обозначим площадь фигуры, задаваемой условием $x^2 \leqslant y \leqslant a(x - x_0) + y_0$. Докажите, что, если $S(a_0)$ — наименьшее значение функции $a \mapsto S(a)$, то прямая $y = a_0(x - x_0) + y_0$ пересекает параболу $y = x^2$ в точках, симметричных относительно точки A.

6.10. Представление об интеграле от неотрицательной функции как площади подграфика этой функции иногда бывает полезным при нахождении интегралов и первообразных.

1. Вычислите $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

2. Найдите первообразную функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

3. Вычислите $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

4. Найдите первообразную функции $y = \arcsin x$.

5*. Взаимно обратные возрастающие функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены при всех $x \geqslant 0$ и $f(0) = 0$. Докажите, что для положительных чисел a и b справедливо неравенство $\int\limits_0^a f(x)\, dx + \int\limits_0^b g(x)\, dx \geqslant ab$.

6. a, b — положительные числа; p, q — числа, большие 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.

6.11. *Объем тела вращения.* Объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс подграфика неотрицательной интегрируемой на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, равен $\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. Вычислите объемы следующих тел:

1. Тело получено вращением вокруг оси абсцисс фигуры, задаваемой условием $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.

2. Тело получено вращением вокруг оси ординат фигуры, задаваемой условием $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.

3. Тело получено вращением вокруг прямой $y = 10$ фигуры, задаваемой условием $0 \leqslant y \leqslant 6 - x - x^2$.

4. Тело получено вращением вокруг оси абсцисс фигуры, задаваемой условием

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x. \end{cases}$$

5. Тело (тор) получено вращением круга радиуса r вокруг оси, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстояние R $(R > r)$.

6.12. *Объем как интеграл от площади сечения.* Пусть $[a; b]$ — проекция некоторого тела на ось абсцисс. Для произвольной точки x из отрезка $[a; b]$ обозначим через $S(x)$ площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку x. Тогда, если функция $y = S(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то объем данного тела равен $\int\limits_a^b S(x)\,dx$.

1. Найдите объем тела, полученного объединением всех квадратов, удовлетворяющих следующим условиям: плоскость квадрата перпендикулярна оси ординат, две противоположные вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, центр квадрата принадлежит отрезку $[0; 1]$ оси ординат.

2. Найдите объем тела, полученного объединением всех кругов, удовлетворяющих следующим условиям: плоскость круга перпендикулярна оси абсцисс, граница круга пересекает ось абсцисс, центр круга лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

3. Дан круг радиуса R, прямая l и положительное число h. Найдите объем тела, полученного объединением всех параболических сегментов (см. п. 8 задачи 5.11),

удовлетворяющих следующим условиям: плоскость сегмента перпендикулярна плоскости круга, высота сегмента равна h, основание сегмента — хорда данного круга, параллельная прямой l.

4. l_1 и l_2 — взаимно перпендикулярные пересекающиеся прямые, R — положительное число. Найдите объем тела, состоящего из всех точек пространства, отстоящих от каждой из прямых l_1, l_2 на расстояние, не большее R.

5. Радиус основания прямого кругового цилиндра равен R, высота цилиндра равна h ($h \geqslant R$). Плоскость, проходящая через две диаметрально противоположные точки одного из оснований цилиндра и образующая с плоскостью основания угол 45°, разбивает цилиндр на две части. Найдите объем каждой из этих частей.

6. Найдите объем общей части двух одинаковых наклонных круговых цилиндров с радиусом основания R и высотой h, верхние основания которых совпадают, а нижние — касаются.

6.13. *Физические приложения интеграла.*

1. Точка движется по оси абсцисс таким образом, что скорость ее в произвольный момент времени t задается формулой $v(t) = \cos(t + \pi/4)$. Найдите положение точки в момент времени $t = \pi/2$, если в момент времени $t = \pi/4$ она имела абсциссу -1.

2. Квадратная пластина со стороной l погружена в воду таким образом, что плоскость пластины перпендикулярна поверхности воды, а верхнее основание находится на поверхности. Найдите силу F давления воды на одну из боковых поверхностей пластины (атмосферное давление не учитывать).

3. Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массы m и однородным стержнем длины l и массы M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно c.

4. Найдите количество тепла, выделяемого переменным синусоидальным током $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ в течение одного периода времени в проводнике с сопротивлением R.

5. Найдите кинетическую энергию однородного стержня длины l и массы m, вращающегося в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня.

6. Найдите кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы M, вращающегося с постоянной угло-

вой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.

7. Из цистерны, имеющей форму прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, требуется выкачать воду с помощью насоса, расположенного в вершине конуса (цистерна стоит на основании). Найдите наименьшую работу по выкачиванию воды из полной цистерны.

8. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота — 140 м, ребро основания (квадрата) — 200 м. Плотность камня, из которого она сделана, приблизительно равна $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³. Найдите работу по преодолению силы тяжести, совершенную при постройке пирамиды Хеопса.

Глава 7

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Логарифмы

Если a, b — положительные числа, $a \neq 1$, то существует единственное число x такое, что $a^x = b$. Это число обозначается $\log_a b$.

7.1. *Свойства логарифмов.* Из определения логарифма и свойств степеней вытекают следующие тождества:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y; \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x; \quad \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x; \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\left(\text{в частности, } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$. Вычислите:

1. $\log_2 2\sqrt{2}$. 2. $\log_{3\sqrt{2}} 4$. 3. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[4]{125}$.

4. $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} (\log_{4\sqrt{5}} 625)$. 5. $2^{\log_4 25}$. 6. $9^{\log_3 7}$.

7. $\sqrt{3}^{\,4+\log_{\frac{1}{9}} 625}$. 8. $\log_{\frac{1}{6}} 2 + \log_{\frac{1}{6}} 3$.

9. $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$. 10. $\dfrac{\log_{3\sqrt{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}$.

11. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

12. $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$. 13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.

14. $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

15*. $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \cdot \log_{\sqrt{6}+1} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) +$
$+ \log_{2\sqrt{6}+7} (2\sqrt{6} + 5)$.

7.2. Число $\log_a b$, где a и b — натуральные числа, можно получить с помощью арифметических действий из чисел вида $\log_p q$, где p и q — простые числа.

1. Найдите $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$.
2. Найдите $\log_{250} 120$, если $\log_9 20 = a$, $\lg 2 = b$.

7.3. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ строго возрастает; если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ строго убывает.

Выясните, какое из чисел больше:

1. $\log_2 \frac{1}{7}$ или $\log_2 \frac{1}{9}$. 2. $\log_{\frac{1}{3}} 5$ или $\log_{\frac{1}{3}} 7$.
3. $\log_{\frac{1}{5}} 3$ или $\log_{\frac{1}{3}} 5$. 4. $\log_6 2$ или $\log_5 2$.
5. $\log_{\frac{1}{7}} 3$ или $\log_{\frac{1}{8}} 3$. 6. $\log_3 2$ или $\frac{2}{3}$.
7. $\log_9 80$ или $\log_7 50$. 8. $\log_{12} 5$ или $\log_{18} 7$.
9. $\log_6 5 + \log_5 6$ или 2. 10*. $\log_{100} 99$ или $\log_{101} 100$.
11. $\log_3^2 5 - \log_3 5$ или 1.
12. $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8$ или 4,4.

§ 2. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

7.4. *Логарифмирование показательных уравнений.* Переход от равенства $b = c$ к равенству $\log_a b = \log_a c$ $(a, b, c > 0,\ a \neq 1)$ называют *логарифмированием*. Решите уравнения:

1. $25^x = 5^{3-x}$. 2. $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$.
3. $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$. 4. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 250$.
5. $3^x \cdot 7^{2-x^2} = 21$. 6. $(x^2 + 1)^{2x-3} = 1$.

7.5. *Замена переменной в показательных уравнениях.* Решите уравнения:

1. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$.
2. $4^{x+3} + 2^{2x+2} = 51$. 3. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$.

4. $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$. 5. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

6. $2^{3x+1} + 1 = 4^x + 2^{x+1}$.

7. $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 34$.

8. $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$.

9. $18 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 36 \cdot 4^{x+1} - 3^{2x+3}$.

10. $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$. 11. $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

12. $7^{3x+1} + 2^{3x+2} = 16 \cdot 28^x - 5 \cdot 98^x$.

7.6. *Потенцирование логарифмических уравнений.* Переход от равенства $b = c$ к равенству $a^b = a^c$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется *потенцированием*. Решите уравнения:

1. $\log_2 x = 3$. 2. $\lg (3x - 1) = 0$.

3. $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) = -2$. 4. $\log_x 3 = 2$.

5. $\log_{6-x} x = 2$. 6. $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$.

7. $\log_2 (2x - 3) + \log_2 (x + 6) = 3$.

8. $\log_3 (2x + 1) - \log_3 (x - 1) = 1$.

9. $1 + 2 \lg 2 = 1/2 \lg (x + 30) + \lg \sqrt{x - 30}$.

10. $\log_3 (\lg (2x + 14) + \lg (x + 12)) = 1$.

11. $\log_2 (2^x - 3) = 2 - x$.

12. $\lg (6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$.

7.7. *Замена переменной в логарифмических уравнениях.* Решите уравнения:

1. $\lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0$. 2. $\log_2^3 2x = 2 \log_2^2 x - 9$.

3. $\log_x^2 (3x^2) = 8 + \log_x 81$.

4. $\log_2 (2^x + 3) \cdot \log_2 (2^{x+2} + 12) = 8$.

5. $x^{2 \log_3 x} = 3x$. 6. $2 \cdot 4^{\lg x} + 5 \cdot 25^{\lg x} = 7x$.

7.8. *Переход к одному основанию.* Решите уравнения:

1. $\log_2 x - 2 \log_8 x + \log_{\sqrt{2}} 2x = \frac{20}{3}$.

2. $\log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x + \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x$.

3. $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$. 4. $2^{\log_x 9} = \frac{4}{3} x$.

7.9. Каждое из следующих уравнений можно решить, подобрав корень и доказав, что других корней нет. Решите уравнения:

1. $3^x + 4^x = 7$. 2. $3^x + 4^x = 7^x$.

3. $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 6^x$.

4. $x^x=27 \quad (x>0)$.
5. $x^{2^x}=16 \quad (x>0)$, 6. $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$.
7. $\log_2 x=3-x$. 8. $x\log_3 x=18$.
9. $x\log_2(x+1)=\log_{\frac{1}{3}} x+7$.

7.10. *Показательные и логарифмические неравенства.* Решите неравенства:

1. $2^x>\frac{1}{2}$.
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}<9$.
3. $3^{x-2}>\frac{2}{5^{2x-1}}$.
4. $\frac{1}{3^x+5}\leqslant\frac{1}{3^{x+1}-1}$.
5. $\log_2(x-1)>1$.
6. $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)>-1$.
7. $\log_3 x+\log_3(x-2)\geqslant 1$.
8. $\log_{\frac{1}{5}}\log_2\frac{3x}{x^2-1}<0$.
9. $2^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{x-2}}>\frac{1}{4}$.
10. $\log_{3-x}x\leqslant -1$.
11. $(x^2-x+1)^{x-2}>1$.

7.11. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5^{\log_{\frac{1}{5}} x}=y-2, \\ 4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-y}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^{4-3y-y^2}=1, \\ (x+y)^2=9x. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2\log_4 x+\log_2(y-1)=1, \\ \log_8 x\cdot\log_{\sqrt{2}}(y-1)=-\frac{4}{3}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \log_6 x=y+4, \\ x^{y+1}=\frac{1}{36}. \end{cases}$
5*. $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4, \\ \log_4 x-\log_4 y=1. \end{cases}$

§ 3. Натуральный логарифм

7.12. Натуральный логарифм положительного числа a задается формулой $\ln a=\int\limits_1^a\frac{1}{x}\,dx$.

Если $a>1$, то $\ln a$ равен площади подграфика функции $y=\frac{1}{x}$ на отрезке $[1;\ a]$; если $0<a<1$, то $\ln a$ ра-

вен площади подграфика функции $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[a; 1]$, взятой со знаком минус. Существует такое число e, что для любого положительного числа a $\ln a = \log_e a$.

1. a, b — положительные числа, $a \leqslant b$. Докажите, что площадь подграфика функции $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[a; b]$ равна $\ln \frac{b}{a}$.

2. a, b — положительные числа, $a \leqslant b$. Докажите, что $\frac{1}{b}(b-a) \leqslant \ln \frac{b}{a} \leqslant \frac{1}{a}(b-a)$.

3. Докажите, что для любого натурального n выполнены неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

4. a, b — положительные числа, $a \leqslant b$. Докажите, что $\ln \frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

5. Докажите, что для любого натурального n выполнены неравенства

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \ln n < 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$\ln n < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{n+1}{2n}.$$

7. Докажите, что $2 < e < 4$.

8. Докажите, что $2{,}5 < e < 3$.

7.13. Производная функции $y = a^x$ вычисляется по формуле $y' = a^x \ln a$; производная функции $y = \log_a x$ вычисляется по формуле

$$y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Вычислите производные следующих функций:

1. $y = e^{3x}$. 2. $y = \frac{x}{2^x}$. 3. $y = x^2 \ln x$.

4. $y = e^{x^2-2x}$. 5. $y = \log_2 \sin x$.

7.14. Для того чтобы вычислить производную функции вида $y = (f(x))^{g(x)}$, удобно представить эту функцию в ви-

де $y = e^{g(x)\ln f(x)}$, функцию вида $y = \log_{f(x)} g(x)$ удобно представить в виде $y = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}$.

Вычислите производные следующих функций:

1. $y = x^x$. 2. $y = x^{\sin x}$. 3. $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
4. $y = \log_x 2$. 5. $y = \log_{\cos x} \sin x$.

7.15. *Постройте графики следующих функций:*

1. $y = e^x - x$. 2. $y = x - \ln x$.
3. $y = x^2 \cdot e^{-x}$. 4. $y = x \cdot \ln x$.

7.16. *Число корней уравнения.* Для каждого значения a найдите число корней следующих уравнений:

1. $e^x = ax$. 2. $\log_a x = x$.
3. $\ln x = x^2 - x + a$. 4*. $\log_a x = a^x$.

7.17. *Доказательство неравенств.* Докажите неравенства:

1. $1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2}$ $(x > 0)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x < \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ $(x > 0)$.
3. $2{,}71 < e < 2{,}73$.
4. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ $(x > 0)$.
5. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} < \ln(1 + x) < \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ $(x > 0)$.
6. Если $a > b \geqslant e$, то $\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$.
7. Если $a > b \geqslant 1$ и $c > 0$, то $\log_a b < \log_{a+c} (b + c)$.
8. $\pi^e < e^\pi$.

7.18. *Иррациональность числа e.*

1. Дробь $\frac{p}{q}$ (p, q — натуральные числа) удовлетворяет условию $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(n+1)!}$. Докажите, что $n \leqslant q$.

2. Докажите, что e — иррациональное число.

7.19. *Неравенство Бернулли.* Докажите неравенства:

1. Если $\alpha > 1, x > -1, x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.
2. Если $0 < \alpha < 1$, $x > -1$, $x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$.
3. Если $\alpha < 0, x > -1, x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.
4. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad (n > 0)$.
5. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \qquad (n > 0)$.

§ 4. Простейшие дифференциальные уравнения

7.20. *Нахождение функции по производной.* Для того, чтобы задача нахождения функции по ее производной имела единственное решение, следует наложить на эту функцию дополнительные ограничения. Чаще всего задают значение искомой функции в некоторой точке (если область определения искомой функции распадается на несколько промежутков, то следует задать по одному из ее значений в каждом из промежутков).

Найдите функции, удовлетворяющие условиям:

1. $f'(x) = x^2$, $f(2) = 1$.
2. $f'(x) = e^{-x}$, $f(0) = -2$.
3. $f'(x) = \frac{1}{x} \ (x > 0)$, $f(e) = e$.
4. $f'(x) = \frac{1}{x} \ (x < 0)$, $f(-1) = 1$.
5. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f(e^2) = 1$, $f(-e^3) = 2$.
6. $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$.

7.21. *Уравнения показательного роста.* Так называют дифференциальные уравнения вида $y' = ky$, где k — вещественное число, не равное нулю. Все решения такого уравнения задаются формулой $y = Ce^{kx}$, где C — вещественное число.

Найдите функции, удовлетворяющие условиям:

1. $f'(x) = 2f(x)$, $f(1) = 2$.
2. $f'(x) + 3f(x) = 0$, $f(-1) = e$.
3. $2f'(x) - 5f(x) = 0$, $f(\pi) = 0$.

7.22. *Уравнения показательного роста* (продолжение).

1. Период полураспада урана U^{235} равен $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Через сколько лет останется 99,99% исходного количества урана U^{235}?

2. В начальный момент времени в питательной среде имелось N_0 бактерий, а через 1 секунду — N_1 бактерий. Известно, что скорость размножения бактерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству. Через какое время количество бактерий увеличилось в 10 раз по сравнению с начальным?

3. Найдите дифференцируемую функцию, определенную на всей оси, если известно, что ее график проходит через точку (2; 3), а касательная к графику в любой точке A пересекает ось абсцисс в такой точке B, что проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось абсцисс равна 1.

4. Точка движется в координатной плоскости так, что если $(x;\ y)$ — ее координаты в произвольный момент времени, то в этот же момент времени $(x;\ -y)$ — координаты ее вектора скорости. В момент времени $t = 0$ точка имела координаты (1; 2). Может ли она в какой-нибудь момент времени иметь координаты (3; 1)?

Глава 8

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Математическая индукция

Метод математической индукции применяют в тех случаях, когда нужно доказать, что некоторое утверждение справедливо для любого натурального числа n. В таких случаях достаточно проверить справедливость этого утверждения при $n = 1$ (*база индукции*) и доказать, что для любого натурального числа k из справедливости утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$ (*индукционный переход*).

8.1. Докажите, что для любого натурального числа n справедливы утверждения:

1. $n^3 + 5n$ делится на 6.

2. $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ — целое число.

3. $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9.

4. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

5. $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3}.

6. $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ делится на 19.

7. Натуральное число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}.

8.2. *Числа Фибоначчи.* Последовательность чисел Фибоначчи (a_n) задается следующим образом: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$. Докажите, что для любого натурального числа n справедливы утверждения:

1. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$
2. $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}$.
3. $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.
4. $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = 1 - a_{2n-1}$.
5. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$.
6. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{2n-1} \cdot a_{2n} = a_{2n}^2$.
7. a_{5n} делится на 5.

8.3. *Доказательство тождеств по индукции.* Предположим, что заданы числовые последовательности (a_n) и (b_n). Для того, чтобы доказать справедливость равенства $a_n = b_n$ при всех n, достаточно проверить, что $a_1 = b_1$ и при любом k $a_{k+1} - a_k = b_{k+1} - b_k$. Докажите тождества:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$
5. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

8.4. *Доказательство неравенств по индукции.* Пусть (a_n), (b_n) — числовые последовательности. Если для некоторого натурального числа S справедливо неравенство $a_S > b_S$ и для всех $k \geqslant S$ справедливо неравенство

$a_{k+1} - a_k > b_{k+1} - b_k$, то при всех $n > S$ справедливо неравенство $a_n > b_n$.

Докажите неравенства:

1. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$ $(n \geqslant 3)$.

2. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 2)$.

3. $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

8.5. *Доказательство неравенств по индукции* (продолжение). Пусть (a_n), (b_n) — последовательности положительных чисел. Если для некоторого натурального числа S справедливо неравенство $a_S \geqslant b_S$ и для всех $k \geqslant S$ справедливо неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k}$, то при всех $n > S$ справедливо неравенство $a_n > b_n$. Докажите неравенства:

1. $n! \geqslant 2^n$ $(n \geqslant 4)$. 2. $2^n > 2n$ $(n \geqslant 3)$.

3. $2^n > n^2 + 2$ $(n \geqslant 5)$. 4. $3^n > n^3$ $(n \neq 3)$.

5. $n^n > (n+1)^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. 6. $(n!)^2 > n^n$ $(n \geqslant 2)$.

7. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$. 8. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \geqslant 6)$.

9. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$.

10. $2!\,4!\,6!\ldots(2n)! > ((n+1)!)^n$ $(n \geqslant 3)$.

11. $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$ $(n \geqslant 6)$. 12. $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

13*. $(n!)! \geqslant ((n-1)!)^{n!}$.

8.6. Иногда при помощи метода математической индукции легче доказать более сильное утверждение, чем то, которое предложено в задаче. Так, например, неравенство 2 задачи 8.4 доказывается легче, чем более слабое неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$. Вот примеры такого рода:

1*. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$.

2*. (a_n) — последовательность чисел Фибоначчи. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство $(a_{n-1} + a_{n+1})a_n = a_{2n}$.

8.7*. *Многочлены Чебышева.* Докажите, что для любого натурального n функция $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен со старшим коэффициентом $\frac{1}{2^{n-1}}$.

8.8*. *Рациональные значения тригонометрических функций.* Вы знаете, что при рациональных значениях x функции $y = \sin \pi x$, $y = \cos \pi x$ могут принимать значения 0; $^1/_2$; ± 1, а функции $y = \operatorname{tg} \pi x$, $y = \operatorname{ctg} \pi x$ — значения 0; ± 1. В этой задаче мы покажем, что никаких других рациональных значений при рациональных значениях x эти функции принимать не могут.

1. $\cos \alpha$ — рациональное число. Докажите, что для любого натурального числа n число $\cos n\alpha$ рационально.
2. Пусть числа $\cos \alpha$, $\cos n\alpha$ рациональны (n — натуральное число), $\cos \alpha = p/q$, $\cos n\alpha = r/s$, где p/q, r/s — несократимые дроби. Докажите, что $2s$ делится на q.
3. Найдите все рациональные x, для которых $\cos \pi x$ — рациональное число.
4. Найдите все рациональные x, для которых $\sin \pi x$ — рациональное число.
5. Найдите все рациональные x, для которых $\operatorname{tg} \pi x$ — рациональное число.

8.9*. Каждый из двух мудрецов задумал натуральное число. Мудрецам сообщили значение модуля разности задуманных ими чисел. Каждый мудрец пытается узнать число, задуманное его партнером. Мудрецы по очереди сообщают друг другу, удалось ли им это сделать. Докажите, что через некоторое время каждый мудрец узнает число, задуманное его партнером.

8.10.** Докажите, что из любых $2n - 1$ натуральных чисел можно выбрать n чисел, сумма которых делится на n.

§ 2. Рекуррентные соотношения

8.11. *Формула общего члена.* В следующих последовательностях найдите члены a_{25} и a_{40}.

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$.   2. $a_n = n^2 - 5n$.

3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.   4. $a_n = [\sqrt{n}]$.

5. $a_n = (-1)^{n/2}$, если n — четное число, и $a_n = \cos \frac{\pi n}{5}$, если n — нечетное число.

8.12. *Рекуррентные соотношения.*

1. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 3$ и $a_n = n^2 + 2a_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Найдите a_2, a_3, a_4, a_5.

2. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-1}^2 - na_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Найдите a_5.

3. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1}$, если n — четное число, и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, если n — нечетное число, $n \geqslant 3$. Найдите a_4, a_5, a_6, a_{70}.

4. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и при $n \geqslant 3$ $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Найдите a_{90}, a_{885}.

8.13. *Прогрессии.* В этой задаче мы изучим последовательности, задаваемые рекуррентными соотношениями вида $a_n = qa_{n-1} + d$. Если $q = 1$, то такая последовательность называется *арифметической прогрессией*, а число d — ее *разностью*; если $d = 0$, то такая последовательность называется *геометрической прогрессией*, а q — ее *знаменателем*.

Общий член арифметической прогрессии задается формулой $a_n = a_1 + d(n - 1)$, общий член геометрической прогрессии — формулой $a_n = a_1q^{n-1}$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии находится по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ находится по формуле $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

1. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, делящихся на 30.

2. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

3. Найдите сумму первых 15-ти членов арифметической прогрессии, если ее восьмой член равен 11.

4. (a_n) — арифметическая прогрессия. Докажите, что существует такая линейная функция $y = f(x)$, что для любого натурального n справедливо равенство $f(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

5. (a_n) (b_n) — арифметические прогрессии, α — вещественное число. Докажите, что $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (αa_n) — арифметические прогрессии.

6. (a_n) — арифметическая прогрессия. Докажите, что существует такая квадратная функция $y = f(x)$, что для любого натурального n $f(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

7. $y = f(x)$ — квадратная функция, $f(0) = 0$. Докажите, что существует такая арифметическая прогрессия (a_n), что для любого натурального n $f(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

8. Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией в том и только в том случае, если при $n \geqslant 2$ справедливо равенство $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

9. Докажите, что последовательность (a_n) является геометрической прогрессией в том и только в том случае, если при $n \geqslant 2$ справедливо равенство $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

10. (a_n) — геометрическая прогрессия. Последовательность (S_n) задана формулой $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что для любого натурального k последовательность S_k, $S_{2k} - S_k$, $S_{3k} - S_{2k}$, ..., является геометрической прогрессией.

11. (a_n), (b_n) — геометрические прогрессии, α — вещественное число. Докажите, что последовательности $(a_n b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ (если для любого n $b_n \neq 0$), (αa_n) являются геометрическими прогрессиями.

12. Последовательность (a_n) задается рекуррентным соотношением $a_n = qa_{n-1} + d$. Докажите, что при $q \neq 1$ можно указать такое число c, что последовательность $b_n = a_n + c$ является геометрической прогрессией.

8.14. *Покрытие натурального ряда арифметическими прогрессиями.* Будем говорить, что несколько арифметических прогрессий покрывают натуральный ряд, если каждое натуральное число является членом хотя бы одной из этих прогрессий. Натуральный ряд легко покрыть несколькими арифметическими прогрессиями, например, прогрессиями $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 1$, $c_n = 4n - 3$. В этой задаче мы выясним, можно ли покрыть натуральный ряд конечным числом арифметических прогрессий с различными разностями, не равными 1.

1. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть двумя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

2. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть тремя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

3*. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть четырьмя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

4*. Укажите пять арифметических прогрессий с различными целыми разностями, не равными 1, покрывающих натуральный ряд.

5. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть конечным числом геометрических прогрессий.

8.15. *Решение рекуррентных соотношений.* **Решить** рекуррентное соотношение — значит найти формулу общего члена для последовательности, заданной этим соотношением. Найдите формулы общего члена для последовательностей, заданных следующими условиями:

1. $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}\quad (n \geqslant 2)$.
2. $a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}^2 + 1}\quad (n \geqslant 2)$.
3. $a_1 = a_2 = 1,\quad a_n = \dfrac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2a_{n-1} - 1}\quad (n \geqslant 3)$.

8.16. *Решение рекуррентных соотношений* (продолжение). В этой задаче мы рассмотрим общий метод решения рекуррентных соотношений вида $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$.

1. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, уравнение $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Докажите, что можно найти такие числа c_1, c_2, что для всех n справедливо равенство $a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$. Докажите, что коэффициенты c_1, c_2 однозначно определяются членами a_1, a_2.

2. Найдите формулу общего члена последовательности (a_n), заданной условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-1}$ $(n \geqslant 3)$.

3. Найдите формулу общего члена последовательности Фибоначчи (см. задачу 8.2).

4. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, дискриминант уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ равен нулю. Докажите, что можно найти такие числа c_1, c_2, что для всех n справедливо равенство $a_n = (c_1 + c_2n)\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n$.

5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n = 4\,(a_{n-1} - a_{n-2})$ $(n \geqslant 3)$.

6. Докажите, что, если последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$, то по-

следовательность $b_n = a_n - a_{n-1}$ удовлетворяет соотношению $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2}$.

7. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ $(n \geqslant 2)$.

8. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1}a_{n-2}^2$ $(n \geqslant 3)$.

9. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}$ $(n \geqslant 3)$.

§ 3. Суммирование

Для последовательности (a_k) символом $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ при $m < n$ обозначается сумма всех членов последовательности с номерами $m, m+1, \ldots, n$; при $m = n$ полагают $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m$.

Запишем с помощью знака $\sum$ несколько известных вам формул

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (q \neq 1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(см. задачу 8.3)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

8.17. *Свойства знака* $\sum$. Докажите следующие свойства знака $\sum$:

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} (-a_k) = -\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$.

2. $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$.

3. $\sum\limits_{k=m}^{n} (\alpha a_k) = \alpha \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ (α — вещественное число).

4. $\sum\limits_{k=m}^{n} a_{k+l} = \sum\limits_{k=m+l}^{n+l} a_k$ (l — натуральное число).

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

8.18. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} 1$. 2. $\sum\limits_{k=2}^{n} (2^k + 3)$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}}$. 4. $\sum\limits_{k=m}^{n} (2^k + k)$.

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(2k-1)$. 6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

8.19. n-й частичной суммой последовательности (a_k) называется число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Найдите n-е частичные суммы следующих последовательностей:

1. $a_k = (-1)^k$. 2. $a_k = (-1)^k k^2$. 3. $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k} i$.

8.20. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. 2. $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. 4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)}$.

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$. 6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

8.21. *Преобразование Абеля.* Пусть (a_n), (b_n) — числовые последовательности. Последовательности (B_n), (S_n) заданы формулами $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Докажите, что при любых натуральных n $(n \geqslant 2)$ справедливо равенство $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^{k-1}$. 2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1}$.

3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)\,2^k}{k(k+1)}$.   4. $\sum_{k=1}^{n} k \sin kx$.

8.22. *Знак* $\prod$. Символом $\prod_{k=m}^{n} a_k$ обозначается произведение $a_m a_{m+1} \ldots a_n$.

1. Докажите равенство: $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$.

Найдите произведения:

2. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.   3. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

4. $\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{(k-1)\,k}\right)$.   5. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

6*. $\prod_{k=1}^{n} (1 + 3^{2^k})$.

Глава 9

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Числовые множества

9.1. *Множество* — это произвольная совокупность предметов. Предметы, из которых составлено множество, называют его *элементами*. Запись $x \in A$ означает, что x — элемент множества A. Иногда множество задают перечислением его элементов. Запись $A = \{2;\ ^2/_3;\ -4\}$ означает, что множество A состоит из чисел 2, $^2/_3$; -4. Часто, чтобы задать множество, указывают свойство, характеризующее его элементы. Например, запись $A = \{x \mid x$ — целое число и $x^2 < 5\}$ означает, что множество A состоит из чисел -2; -1; 0; 1; 2. Запись $B = \{2n \mid n$ — целое число$\}$ означает, что B — множество всех четных целых чисел. За некоторыми часто встречающимися множествами закреплены стандартные обозначения. Так, множество всех натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$, множество всех целых чисел — $\mathbb{Z}$, множество всех рациональных чисел — $\mathbb{Q}$, множество всех вещественных чисел — $\mathbb{R}$. Множество, не имеющее эле-

ментов, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A — *подмножество* множества B, и пишут $A \subset B$. Для любого множества A справедливы утверждения: $\varnothing \subset A$, $A \subset A$.

Выясните, какие из следующих утверждений справедливы:

1. $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\}$.
2. $-3 \in \left\{x \,\middle|\, \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2} < -2\right\}$.
3. $3 \in \left\{\frac{2n + 1}{3n - 2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
4. $\{1; -1; 2\} \subset \{x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0\}$.
5. $\{x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0\} \subset \{1; -1; 2\}$.
6. $\left\{x \,\middle|\, \frac{2x - 3}{2x^3 - 5x^2 + x + 3} = 1\right\} \subset$
$\subset \{x \mid 2x - 3 = 2x^3 - 5x^2 + x + 3\}$.

9.2. *Пересечение множеств. Пересечением множеств* A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A, B. Это множество обозначается $A \cap B$. Найдите пересечение следующих множеств:

1. $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{5; 4; 3; 2\}$.
2. A — множество всех ромбов, B — множество всех прямоугольников.
3. $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $A = \{8n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. $A = \{8n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
6. $A = \{x \mid x^4 - 3x^2 + 2x + 4 = 0\}$, $B = \{x \mid 2x^4 + x^2 + 4x + 1 = 0\}$.

9.3. *Объединение множеств. Объединением множеств* A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B. Это множество обозначается $A \cup B$. Найдите объединение следующих множеств:

1. $A = \{-1; 1; 4; 0\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$.
2. $A = \{6n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. A — множество всех целых чисел, не делящихся на 6, B — множество всех целых чисел, не делящихся на 9.

9.4. *Разность множеств. Разностью множеств* A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Это множест-

во обозначается $A \setminus B$. Найдите разность следующих множеств:

1. $A = \left\{\frac{1}{2}; -1; 3\right\}$, $B = \left\{-1; \frac{1}{2}; 5; 0\right\}$.

2. A — множество всех правильных многоугольников, B — множество всех равнобедренных треугольников.

3. A — множество всех целых чисел, делящихся на 6, B — множество всех целых чисел, не делящихся на 4.

4. $A = \left\{x \,\middle|\, \frac{x-1}{x^3+x+1} > 0\right\}$, $B = \{x \mid x^3 + x + 1 \leqslant 0\}$.

9.5. *Равномощные множества.* Конечные множества можно сравнивать по числу элементов. Чтобы иметь возможность сравнивать бесконечные множества, заметим, что конечные множества A и B имеют поровну элементов в том и только в том случае, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Назовем произвольные множества A и B *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Докажите равномощность следующих множеств X и Y:

1. X, Y — замкнутые отрезки ненулевой длины.
2. X, Y — окружности.
3. X — график некоторой числовой функции, Y — область определения этой функции.

4*. X — прямая, Y — объединение двух параллельных прямых.

5*. X — прямая, Y — объединение двух пересекающихся прямых.

6*. $X = [a; b]$, $Y = [a; b)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

7*. $X = [a; b]$, $Y = (a; b)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

8. X — открытый промежуток, Y — прямая.
9. X — замкнутый промежуток, Y — прямая.

9.6. *Счетные множества.* Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел. Докажите следующие утверждения:

1. $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество.
2. $\{n^2 + 3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество.
3. $\mathbb{N} \cup \{0\}$ — счетное множество.
4. $\mathbb{Z}$ — счетное множество.

5*. $\mathbb{Q}$ — счетное множество.

6. Если X — счетное множество, $A \subset X$, то A — либо конечное, либо счетное множество.
7. Если X, Y — счетные множества, то $X \cup Y$ — счетное множество.

8. Если (X_n) — последовательность счетных множеств, то их объединение — счетное множество.

9*. Если A — бесконечное множество, B — счетное множество, то множества $A \bigcup B$ и A равномощны.

10. Множество всех алгебраических чисел — счетное множество. (Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем какого-либо уравнения вида $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$.)

11*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся кругов, лежащих в одной плоскости,— счетное множество.

12*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся «восьмерок», лежащих в одной плоскости,— счетное множество. («Восьмерка» — это объединение двух касающихся окружностей.)

13*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся «крестов», лежащих в одной плоскости,— счетное множество. («Крест» — это объединение двух отрезков, имеющих единственную общую внутреннюю точку.)

9.7. *Континуальные множества.* Множество называется *континуальным*, если оно равномощно множеству всех вещественных чисел.

1. Докажите, что множество всех иррациональных чисел континуально.

2. Докажите, что множество всех трансцендентных чисел континуально. (Число называется *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим, см. п. 10 задачи 9.6.)

3. Поставим в соответствие каждой паре вещественных чисел $(\alpha; \beta)$ с десятичными записями $\alpha = 0,\ a_1a_2a_3\ldots$, $\beta = 0,\ b_1b_2b_3\ldots$ число $\gamma = 0,\ a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$ (для чисел вида $\frac{m}{10^n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, из двух десятичных записей выбирается та, которая имеет в периоде 0). Используя это соответствие, докажите континуальность квадрата.

4. Докажите континуальность множества всех точек плоскости.

5*. Докажите, что если объединение двух множеств континуально, то хотя бы одно из них континуально.

9.8. *Счетное и континуальное множества не равномощны.*

1. (x_n) — последовательность вещественных чисел. Число a таково, что для любого натурального n n-я после запятой цифра десятичной записи числа a отлична от 9

и от n-й после запятой цифры десятичной записи числа x. Докажите, что число a не равно ни одному из членов последовательности (x_n).

2*. Докажите, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ не равномощны.

§ 2. Числовые функции

9.9. *График числовой функции.* Множество точек на координатной плоскости является графиком какой-нибудь функции в том и только в том случае, если всякая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, пересекает его не более чем в одной точке. Выясните, существуют ли функции, графики которых есть множества точек координатной плоскости, задаваемые условиями:

1. $xy = 0$. 2. $xy = 1$. 3. $x^2 + y^2 = 1$.
4. $x^2 + y^2 = 2y - 1$. 5. $2^y = x$. 6. $\sin y = x$.
7. $\cos y = 2 + \sin 2x$. 8. $2^{y^2} \leqslant \cos x$.

9.10. Постройте графики каких-либо функций, удовлетворяющих условиям:

1. Область определения функции — промежуток $[0; 1]$, область значений — множество всех вещественных чисел.

2. Область определения функции — множество всех положительных чисел, область значений — промежуток $[0; 1]$.

3. Область определения функции — промежуток $[0; 1]$, область значений — промежуток $(0; 1)$.

4. Область определения функции — промежуток $(0; 1)$, область значений — промежуток $[0; 1]$.

9.11. Пусть f — числовая функция. Для любого множества A, содержащегося в области определения функции f, через $f(A)$ обозначим множество $\{f(x) \mid x \in A\}$. Для любого вещественного числа b обозначим через $f^{-1}(b)$ множество $\{x \mid f(x) = b\}$. Для любого числового множества B обозначим через $f^{-1}(B)$ множество $\{x \mid f(x) \in B\}$. Функция f задана формулой $f(x) = x^2$. Найдите следующие множества:

1. $f([0; 1])$. 2. $f((-1; 2])$. 3. $f^{-1}(4)$.
4. $f^{-1}((-\infty; 1])$. 5. $f^{-1}([1; 9])$.

Функция f задана формулой

$f(x) = |x| + |x - 1| - |2x - 4| + |2x - 7| - 4$.

Найдите следующие множества:

6. $f((-\infty; +\infty))$. 7. $f([0; 1])$. 8. $f\left(\left(0; \frac{7}{2}\right]\right)$.
9. $f((-\infty; 0))$. 10. $f((-1; 3))$. 11. $f^{-1}(2)$.

12. $f^{-1}(0)$. 13. $f^{-1}([0;\ 1))$. 14. $f^{-1}([0;\ 2])$.
15. $f^{-1}((0;\ +\infty))$.

9.12. Постройте графики каких-либо функций, определенных на множестве всех вещественных чисел и удовлетворяющих условиям:

1. Множество $f^{-1}(\alpha)$ состоит из одного числа, если $\alpha \neq 0$, $f^{-1}(0) = \varnothing$.

2. Множество $f^{-1}(\alpha)$ состоит из одного числа, если $\alpha \neq 0$, и из двух чисел, если $\alpha = 0$.

3. Для любого числа α множество $f^{-1}(\alpha)$ состоит из двух чисел.

9.13. *Периодические функции* (см. гл. IV, § 5). Пусть f — числовая функция, Ω — множество ее периодов.

1. Докажите, что, если $x, y \in \Omega$, то $x + y$, $x - y \in \Omega$.

2. Докажите, что либо в множестве Ω есть наименьшее положительное число k, и в этом случае $\Omega = \{nk \mid n \in \mathbb{Z}\}$, либо в каждом промежутке ненулевой длины есть числа из множества Ω.

3. Приведите пример числовой функции, множество периодов которой есть множество всех рациональных чисел.

4. f, g — числовые функции с общей областью определения, k — период f, l — период g, $k \neq 0$, $l \neq 0$, $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f + g$, $f - g$, fg — периодические функции.

5*. α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$. Числовая функция f, определенная на множестве всех вещественных чисел, такова, что $f(x + \alpha) = f(x) + \beta$ для любого числа x. Докажите, что функцию f можно представить в виде суммы периодической функции и линейной функции.

6*. α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$. Числовая функция f, определенная на множестве всех вещественных чисел, такова, что $f(x + \alpha) = \beta \cdot f(x)$ для любого числа x. Докажите, что функцию f можно представить в виде произведения периодической функции и показательной функции.

9.14. *Четные и нечетные функции.* Числовая функция f называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно точки 0, и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Числовая функция f называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно точки 0, и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. Пусть f и g — число-

вые функции с общей областью определения. Докажите следующие утверждения:

1. Если f и g — четные функции, то $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ — четные функции.

2. Если f и g — нечетные функции, то $f + g$, $f - g$ — нечетные функции, $f \cdot g$ — четная функция.

3. Если f — четная функция, g — нечетная функция, то fg — нечетная функция.

Функция f определена на всей числовой оси, a, b — вещественные числа. Докажите следующие утверждения:

4. График функции f симметричен относительно прямой $x = a$ в том и только в том случае, если $f(a + x) = f(a - x)$ при всех x.

5. График функции f симметричен относительно точки $(a; b)$ в том и только в том случае, если $f(a + x) + f(a - x) = 2b$ при всех x.

Докажите, что для любой числовой функции f справедливы следующие утверждения:

6. Если график функции f имеет две оси симметрии, перпендикулярные оси абсцисс, то f — периодическая функция.

7. Если график функции f имеет ось симметрии, перпендикулярную оси абсцисс, и центр симметрии, то f — периодическая функция.

8. Если график функции f имеет два центра симметрии, то функцию f можно представить в виде суммы периодической и линейной функции.

9. Если область определения функции f симметрична относительно точки 0, то f можно единственным образом представить в виде суммы четной и нечетной функции.

10*. Если функция f определена на всей числовой оси, то ее можно представить в виде суммы двух функций, определенных на всей числовой оси, график каждой из которых имеет центр симметрии.

9.15. *Обратная функция.* Пусть A — область определения, а B — область значений числовой функции f. Функция f называется *обратимой*, если для любых различных чисел $a_1, a_2 \in A$ выполнено условие $f(a_1) \neq f(a_2)$. Если f — обратимая функция, то функция g, ставящая в соответствие каждому числу $b \in B$ такое число $a \in A$, что $f(a) = b$, называется *обратной* к f. График функции g симметричен графику функции f относительно прямой $y = x$. Примерами взаимно обратных функций могут служить функции $f(x) = e^x$ и $g(x) = \ln x$; $f(x) = \sin x$

$\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ и $g(x)=\arcsin x$. Для каждой из следующих функций найдите обратную:

1. $f(x)=2x+3$. 2. $f=\frac{2x-1}{x+2}$.
3. $f(x)=x^2\ (x\in[0;+\infty))$. 4. $f(x)=x^2\ (x\in(-\infty;0])$.
5. $f(x)=-x^2\ (x\in(-\infty;0])$.
6. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;1), \\ 3-x, & \text{если } x\in[1;2]. \end{cases}$
7. $f(x)=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right)$.
8. $f(x)=e^x+e^{-x}\ (x\in[0;+\infty))$.
9. $f(x)=\log_2(x^2-1)\ (x\in[2;+\infty))$.

9.16. *Композиция функций.* Пусть f и g — числовые функции, причем область определения функции g содержит область значений функции f. *Композицией* функций f и g называется функция $g\circ f$, задаваемая формулой $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Найдите композицию $g\circ f$ для следующих функций f и g:

1. $f(x)=x^2+x,\ g(x)=2x-1$.
2. $f(x)=2x-1,\ g(x)=x^2+x$.
3. $f(x)=\ln x,\ g(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x<1, \\ e^{2x-1}, & \text{если } x\geqslant 1. \end{cases}$

4. f и h — числовые функции с общей областью определения. Докажите, что если функция f обратима, то существует единственная функция g, определенная на области значений функции f, такая, что $g\circ f=h$.

5. Приведите пример определенной на всей числовой оси функции f, такой, что $f(e^x)=x$ при всех x.

6. h — четная функция, определенная на всей числовой оси. Докажите, что существует определенная на всей числовой оси функция g такая, что $h(x)=g(x^2)$ при всех x.

7. h — четная 2π-периодическая функция, определенная на всей числовой оси. Докажите, что существует определенная на всей числовой оси функция g такая, что $h(x)=g(\cos x)$ при всех x.

8. Существует ли определенная на всей числовой оси функция g такая, что $g(\sin x)=\cos x$ при всех x?

9.17. *Промежутки монотонности.* Если в композиции $g\circ f$ функция g монотонна, то каждый промежуток

монотонности функции f является промежутком монотонности функции $g \circ f$. Это соображение поможет вам найти промежутки монотонности и построить графики следующих функций:

1. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. 2. $f(x) = \log_2(2 - x^2)$.
3. $f(x) = \ln \sin x$. 4. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$.
5. $f(x) = 1/\cos x$. 6. $f(x) = \log_x 2$.
7. $f(x) = \frac{1}{2 - x - x^2}$.

9.18. Числовая функция может вовсе не иметь промежутков монотонности. Такова, например, функция Дирихле: $f(x) = 1$, если x — рационально, и $f(x) = 0$, если x — иррационально.

1. Приведите пример обратимой функции, определенной на всей числовой оси и не имеющей промежутков монотонности.

2. Функция f, определенная на всей числовой оси, такова, что для любых различных рациональных чисел x_1, x_2 числа $f(x_1)$, $f(x_2)$ — различные целые. Докажите, что функция не имеет промежутков монотонности.

9.19. *Функциональные уравнения.*

1. Найдите функцию f, если известно, что ее областью определения является множество $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$, и при всех $x \neq -1$ выполняется равенство $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

2*. Найдите функцию f, если известно, что при всех $x \neq 0$ выполняется равенство $(x+1) f(x) = 1 - f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 1$.

3*. Найдите функцию f, определенную при всех $x \neq \pm\frac{1}{3}$ и удовлетворяющую равенству

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x).$$

9.20. *Функциональное уравнение линейной функции.* Монотонная функция f определена на всей числовой оси и для любых чисел x, y справедливо равенство

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Докажите следующие утверждения:

1. Если $n \in \mathbb{N}$, то $f(nx) = nf(x)$ при всех x.
2. Если $m, n \in \mathbb{N}$, то $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$.
3. $f(0) = 0$.

4. $f(-x) = -f(x)$ при всех x.

5* f — линейная функция.

9.21. Функция f определена на всей числовой оси, и для любых x, y выполняются равенства $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Докажите следующие утверждения:

1. Если $x \geqslant 0$, то $f(x) \geqslant 0$.
2. f — монотонна.
3. Либо $f(x) = 0$ для любого x, либо $f(x) = x$ для любого x.

9.22. *Функциональное уравнение показательной функции.* Строго монотонная функция f определена на всей числовой оси, и для любых чисел x, y справедливо равенство $f(x+y) = f(x)f(y)$. Докажите утверждения:

1. Если $n \in \mathbb{N}$, то $f(nx) = (f(x))^n$ при всех x.
2. $f(x) > 0$ при всех x.
3. Если $m, n \in \mathbb{N}$, то $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{(f(1))^m}$.
4. $f(0) = 1$.
5. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ при всех x.

6*. f — показательная функция.

§ 3. Предел последовательности

Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров n, начиная с номера N, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Иначе говоря, a — предел последовательности (x_n), если любой промежуток ненулевой длины, содержащий внутри себя точку a, содержит все члены последовательности (x_n), начиная с некоторого. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся* последовательностью. Сходящаяся последовательность (x_n) имеет единственный предел. Он обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

9.23. Для каждой из следующих последовательностей (x_n) найдите число a, являющееся ее пределом, и для произвольного положительного числа ε укажите какой-нибудь номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

1. $x_n = \frac{1}{n}$. 2. $x_n = \frac{2}{n^3}$. 3. $x_n = \frac{1}{3^n}$.

4. $x_n = \left(-\frac{2}{5}\right)^n$. 5. $x_n = \frac{\sin n}{n}$. 6. $x_n = \operatorname{arctg} n$.

7. $x_n = \frac{1}{2n^2+5n}$.

8. $\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{8}; \frac{1}{5}; \frac{1}{16}; \frac{1}{7}; \ldots$

9. $x_n = \operatorname{sgn}(n^2 - 5n - 7)$. 10. $x_n = \left[\frac{7n+5}{n^2+1}\right]$.

9.24. Выясните, существуют ли последовательности, сходящиеся к нулю и удовлетворяющие следующим условиям:

1. $x_n < \frac{1}{n}$ при всех n.
2. $x_n > \frac{1}{n}$ при всех n.
3. $x_n > \frac{1}{10} - \frac{1}{n}$ при всех n.
4. $0 < x_n < x_{2n}$ при всех n.

9.25. Докажите, что следующие последовательности не имеют пределов:

1. $1; -1; 1; -1; \ldots$ 2. $1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; \ldots$

3. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$

4. $x_n = 2^n + 1$. 5. $x_n = \sin n$.

9.26. Докажите, что если последовательность (x_n) сходится к числу a и последовательность (y_n) получена перестановкой членов последовательности (x_n), то и последовательность (y_n) сходится к числу a.

9.27. Докажите, что если монотонная последовательность (x_n) не ограничена, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ сходится к нулю.

9.28. *Действия над сходящимися последовательностями.* Если (x_n), (y_n) — сходящиеся последовательности, то последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$. Если все члены последовательности (x_n) неотрицательны, то при любом натуральном k последовательность $(\sqrt[k]{x_n})$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Вычислите пределы следующих последовательностей:

1. $x_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}$. 2. $x_n = \frac{n}{n+1}$.

3. $x_n = \frac{3n^2+n+7}{5-n-n^2}$. 4. $x_n = \frac{2n-1}{3n^2+n+2}$.

5. $x_n = \frac{2n^2+n+1}{n-2} + \frac{4n^2+3n-1}{1-2n}$.

6. $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

7. $x_n = \frac{3^{n-1}}{3^n-2}$. 8. $x_n = \frac{2^n+3^{n+1}+5^{n-1}}{3^n+5^{n+1}}$.

9. $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$. 10. $x_n = \frac{\sqrt[3]{3n^3+1}}{\sqrt{2n^2-1}}$.

11. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. 12. $x_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$.

13*. $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$.

14. $x_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}}$.

9.29. Если последовательность (x_n) ограничена, а последовательность (y_n) сходится к нулю, то последовательность $(x_n y_n)$ сходится к нулю. Вычислите пределы последовательностей:

1. $x_n = \frac{\{\pi n\}}{n}$. 2. $x_n = \frac{[\pi n]}{n}$.

3. $x_n = \frac{\sin^3 n}{n^2+n}$. 4. $x_n = \frac{2^{n-1}+\operatorname{arctg} n}{2^n}$.

9.30. *Сумма членов геометрической прогрессии.* Если (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q таким, что $|q| < 1$, то последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

сходится и $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}$. Число $\lim_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* членов геометрической прогрессии (x_n). Вычислите пределы следующих последовательностей:

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. 2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k}$.

3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}+1}{2^{2k}}$. 4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3+3^2+\ldots+3^k}{5^{k+2}}$.

5. $0, c_1c_2c_3$ — десятичная запись числа α. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой $x_n = 0, c_1c_2 \ldots c_n$, сходится к α.

6. Десятичная запись числа α — периодическая дробь $0, a_1a_2 \ldots a_k(b_1b_2 \ldots b_l)$. Выразите число α через целые числа $a = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_k$ и $b = b_1 10^{l-1} + b_2 10^{l-2} + \ldots + b_l$ (если дробь чисто периодическая, то $a = 0$).

9.31. *Принцип сжатой последовательности.* Если последовательности (x_n) и (z_n) сходятся к числу a, а последовательность (y_n) такова, что при всех n выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность (y_n) сходится к числу a. Докажите сходимость и найдите пределы последовательностей, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для любого n справедливы неравенства $\frac{n}{2n+1} < x_n < \frac{n+1}{2}$.

2. $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$.

3. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

4. $x_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, где S_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ оси абсцисс, а высота равна одному из значений функции $y = x^2$ на этом отрезке.

9.32. Последовательность положительных чисел (x_n) такова, что последовательность $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ сходится к некоторому числу, меньшему 1. Докажите, что последователь-

ность (x_n) сходится к нулю. Установите сходимость к нулю следующих последовательностей:

1. $x_n = \frac{n^p}{a^n} (a > 1)$. 2. $x_n = \frac{a^n}{n!}$.

3. $x_n = \frac{(2n)!}{a^{n!}} (a > 1)$. 4. $x_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n+2)}$.

9.33. Если $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

1. (x_n) — числовая последовательность, сходящаяся к числу a. Докажите, что всякая подпоследовательность последовательности (x_n) сходится к числу a.

2. Последовательность (x_n) такова, что последовательности (x_{2n}) и (x_{2n-1}) сходятся к одному и тому же числу. Докажите, что последовательность (x_n) сходится к тому же числу.

9.34. *Монотонные ограниченные последовательности.* Предлагаем решить несколько задач, основанных на теореме: *если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.*

1. f — возрастающая функция. Последовательность (x_n) такова, что для любого натурального n выполняется равенство $x_n = f(x_{n-1})$. Докажите, что если $x_1 \leqslant x_2$, то (x_n) — возрастающая последовательность, а если $x_1 \geqslant x_2$, то (x_n) — убывающая последовательность. Докажите, что, если f — ограниченная функция, то последовательность (x_n) сходится. Установите сходимость и вычислите пределы последовательностей (x_n), удовлетворяющих условиям:

2. $x_n = \sqrt{x_{n-1} + 2} \quad (n \geqslant 2,\ x_1 \geqslant -2)$.

3. $x_n = -\sqrt{1 - x_{n-1}} \quad (n \geqslant 2,\ x_1 \leqslant 1)$.

4. $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2 \quad (n \geqslant 2,\ x_1 \in [0; 1])$.

5. $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \quad (n \geqslant 2, a > 0, x_1 > 0)$.

6. $x_n = \frac{1}{3}\left(2x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^2}\right) \quad (n \geqslant 2, a > 0, x_1 > 0)$.

Выясните, при каких значениях x_1 сходятся последовательности (x_n), удовлетворяющие следующим условиям:

7*. $x_n = x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} + 1 \quad (n \geqslant 2)$.

8*. $x_n = x_{n-1}^3 + \frac{3}{4} x_{n-1} \quad (n \geqslant 2)$.

9.35. *Монотонные ограниченные последовательности* (продолжение).

1. f — убывающая функция. Последовательность (x_n) такова, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполняется равенство $x_n = f(x_{n-1})$. Докажите, что последовательности (x_{2n-1}) и (x_{2n}) монотонны, причем одна из них возрастает, а другая — убывает. Докажите, что, если число x_1 не расположено между числами x_2 и x_3, то последовательности (x_{2n-1}) и (x_{2n}) сходятся. Установите сходимость последовательностей (x_n), удовлетворяющих условиям:

2. $x_n = \cos x_{n-1} \quad (n \geqslant 2,\ x_1 = 1)$.

3. $x_n = (1 - x_{n-1})^2 \quad \left(n \geqslant 2,\ x_1 = \frac{1}{2}\right)$.

4. $x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n \geqslant 2,\ x_1 = 1)$.

5. $x_n = \frac{x_{n-1} + a}{x_{n-1} + 1} \quad (n \geqslant 2,\ a > 0,\ x_1 \geqslant 0)$.

§ 4. Предел функции

Число b называется *пределом* функции f в точке a, если для всякой последовательности (x_n), сходящейся к a, все члены которой принадлежат области определения функции f и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b. В этом определении предполагается, что точка a такова, что последовательности (x_n) с перечисленными свойствами существуют. Предел функции f в точке a обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

9.36. Выясните, существует ли предел функции f в точке a:

1. $f(x) = x - 2,\ a = 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{x-2},\ a = 2$.
3. $f(x) = \sqrt{1 + x},\ a = -\frac{1}{2}$.
4. $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ a = -3$.
5. $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ a = 0$.
6. $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1, \end{cases} \quad a = -1$.
7. $f(x) = [x],\ a = \frac{3}{2}$.
8. $f(x) = \{x\},\ a = 4$.
9. $f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\},\ a = 0$.
10. $f(x) = x\left\{\frac{1}{x}\right\},\ a = 0$.

11. $f(x)=x^2\left[\frac{1}{x}\right]$, $a=0$. 12. $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=\frac{\pi}{2}$.

13. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $a=0$. 14. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $a=0$.

9.37. Если функции f и g с одинаковой областью определения имеют в точке a пределы, то функции $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ имеют в точке a пределы и $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Если, кроме того, функция g не обращается в нуль и $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то функция f/g имеет в точке a предел, равный $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-7)$. 2. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{4-x}{x^2+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{2x^3-x^2-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+3}}{x+x^2}$. 10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}}$.

9.38*. Приведите пример таких функций f и g, заданных на всей числовой оси, что функция f имеет в некоторой точке a предел, равный b, функция g имеет предел в точке b, функция $g\circ f$ имеет предел в точке a, но

$$\lim_{x\to a} g(f(x))\neq\lim_{x\to b} g(x).$$

9.39. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если она определена в этой точке и имеет в ней предел, равный $f(a)$. Выясните, в каких точках a непрерывны следующие функции:

1. $f(x)=x$, если $|x|>1$ и $f(x)=x^2$, если $|x|\leqslant 1$.
2. $f(x)=\operatorname{sgn} x$. 3. $f(x)=[x]$.
4. $f(x)=\{x\}$. 5. $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$.

6. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

7. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

8. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$. 9. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x$.

10. $f(x)=1$, если x рационально и $f(x)=0$, если x иррационально.

11. $f(x)=x$, если x рационально и $f(x)=-x$, если x иррационально.

12*. $f(x)=1/n$, если $x=m/n$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, дробь m/n несократима) и $f(x)=0$, если x иррационально.

13*. Область определения функции f — промежуток $[0; 1)$, и $f(x)=0, 0a_10a_20a_3\ldots$, если $x=0, a_1a_2a_3\ldots$ (для чисел x вида $m/10^n$ из двух десятичных записей выбирается та, которая содержит 0 в периоде).

9.40. При вычислении следующих пределов полезно воспользоваться равенством $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, а также непрерывностью синуса и косинуса. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin 4x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 5x}{\sin x-\sin 3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

§ 5. Свойства непрерывных функций

9.41. *Сохранение знака.* Если функция f непрерывна в точке a и $f(a)>0$, то все значения этой функции в точках области определения, принадлежащих некоторому промежутку, содержащему внутри себя точку a, также положительны. Если $f(a)<0$, имеет место аналогичное утверждение.

1. Уравнение $x^3+ax+1=0$ имеет три вещественных корня. Докажите, что существует такое положительное число ε, что для любого числа b из промежутка $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ уравнение $x^3+bx+1=0$ имеет три вещественных корня.

2. Множество решений неравенства $\sqrt{2 - x - x^2} < 2^x + 1$ — отрезок $[a; b]$. Найдите a и b.

3. Множество решений неравенства $\ln(1 - x^2) \leqslant x + {}^1/_4$ — промежуток $(a; b)$. Найдите a и b.

9.42. *Теорема о промежуточном значении.* Если функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$, то любое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, является значением функции f в некоторой точке отрезка $[a; b]$. Докажите, что следующие уравнения имеют корни:

1. $2^{x^2-x} = 3 \sin x$. 2. $5x \lg \operatorname{tg} x = 5 - x$.

3. $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 1} = \sqrt{x^5 + x^2 + x}$.

4. $\operatorname{arctg}^3 x = 2 \operatorname{tg} x - 1$.

5. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — вещественные числа, $a_n \neq 0$, n — нечетное число.

9.43. *Теорема о промежуточном значении в геометрических задачах.*

1. Многоугольник M и прямая l лежат в одной плоскости. Докажите, что существует прямая $l' \parallel l$, разбивающая M на два равновеликих многоугольника.

2. Многоугольник M и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что существует прямая, проходящая через точку A и разбивающая M на два равновеликих многоугольника.

3*. M — выпуклый многоугольник. Докажите, что существуют две взаимно перпендикулярные прямые, разбивающие M на четыре равновеликих многоугольника.

4*. Попарно различные лучи OA, OB, OC и многоугольник M лежат в одной плоскости. Докажите, что существует такой параллельный перенос T, что лучи OA, OB и OC разбивают многоугольник $T(M)$ на три равновеликих многоугольника.

9.44. Решите еще несколько задач на применение теоремы о промежуточном значении.

1. f — непрерывная функция, заданная на промежутке $[0; 1]$, все значения которой содержатся в промежутке $[0; 1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

2. Непрерывная функция f определена на множестве всех вещественных чисел. Докажите, что если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

3*. Непрерывная функция f определена на отрезке $[a; b]$. Докажите, что, если $f(a) = f(b)$ и для любого $x \in (a; b)$ $f(x) \geqslant f(a)$, то для любого положительного ε, меньшего $b - a$, график функции f имеет хорду длины ε, параллельную оси абсцисс.

4. Непрерывная функция f определена на промежутке. Докажите, что функция f обратима в том и только в том случае, если f — строго монотонная функция.

5. Непрерывная функция f определена на отрезке $[a; b]$. Докажите, что если функция f не является строго монотонной, то для любого положительного числа ε график функции f имеет хорду, параллельную оси абсцисс, длина которой меньше ε.

6. Непрерывная функция f определена на всей числовой оси и принимает все вещественные значения. Докажите, что если для любого числа a уравнение $f(x) = a$ имеет не более двух корней, то f — строго монотонная функция.

7*. Непрерывные функции f и g определены на всей числовой оси. Число 1 является периодом этих функций. Докажите, что существуют такие различные числа x_1, x_2 из промежутка $[0; 1)$, что $f(x_1)\, g(x_2) = f(x_2)\, g(x_1)$.

9.45*. *Периоды непрерывной функции.* Докажите, что если периодическая функция f имеет точку непрерывности, то либо f — постоянная функция, либо среди положительных периодов функции f есть наименьший.

Глава 10

КОМБИНАТОРИКА

§ 1. Комбинаторные рассуждения

10.1. *Сравнение конечных множеств.*

1. В множестве X — n элементов. Докажите, что для любого целого числа k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ число k-элементных подмножеств множества X равно числу $(n - k)$-элементных подмножеств множества X.

2. X — конечное множество, a — элемент множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих элемент a или не содержащих элемент a?

3. X — конечное множество, A — подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не пересекающихся с множеством A?

4. X — конечное множество, A — подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не содержащих множество A?

5. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких многоугольников с вершинами в этих точках больше, содержащих точку A или не содержащих точку A?

6. Докажите, что в любом непустом конечном множестве подмножеств с четным числом элементов столько же, сколько подмножеств с нечетным числом элементов.

10.2. *Разбиение числа на слагаемые.* Докажите, что для любых натуральных чисел n и k справедливы следующие утверждения:

1. Число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, удовлетворяющих условию $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_k \geqslant 0$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n + k$, удовлетворяющих условию $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0$.

2. Число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n + \frac{k(k-1)}{2}$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

3*. Число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n = k$.

10.3. *Формула включения и исключения.*

1. В множестве A 5 элементов, в множестве B 7 элементов, в множестве $A \cap B$ 3 элемента. Сколько элементов в множестве $A \cup B$?

2. S_1 — сумма чисел элементов конечных множеств A, B, C; S_2 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$; S_3 — число элементов множества $A \cap B \cap C$. Сколько элементов в множестве $A \cup B \cup C$?

3. S_1 — сумма чисел элементов конечных множеств A, B, C, D; S_2 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$, $C \cap D$; S_3 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap D$, $A \cap C \cap D$, $B \cap C \cap D$; S_4 — число элементов мно-

жества $A \cap B \cap C \cap D$. Сколько элементов в множестве $A \cup B \cup C \cup D$?

4*. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества, S_1 — сумма чисел элементов этих множеств; S_n — число элементов множества $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, и если натуральное число k таково, что $2 \leqslant k \leqslant n-1$, то S_k — сумма чисел элементов всех множеств, являющихся пересечениями каких-либо k из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Сколько элементов в множестве $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$?

5. Сколько есть четырехзначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

6*. $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все различные простые делители натурального числа n $(n \geqslant 2)$, $\varphi(n)$ — число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

10.4. *Две задачи о конечных множествах.* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества X. Докажите следующие утверждения:

1*. Если пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто и n меньше половины числа всех подмножеств множества X, то найдется подмножество множества X, отличное от множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и имеющее с каждым из этих множеств непустое пересечение.

2*. Если пересечение любых трех из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто и n равно половине числа всех подмножеств множества X, то пересечение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто.

10.5. *Принцип ящиков.* При любом распределении $n+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее двух предметов. В более общей форме п р и н ц и п я щ и к о в состоит в следующем: *при любом распределении $nk+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее чем $k+1$ предмет.*

1. Докажите, что среди любых одиннадцати натуральных чисел есть два числа, разность которых делится на 10.

2. Некоторые точки из данного конечного множества точек соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

3. Докажите, что среди любых $n+2$ натуральных чисел есть два числа, сумма либо разность которых делится на $2n$.

4. Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел, меньших $2n$, есть два числа, отношение которых — степень числа 2.

5. Докажите, что среди $n+1$ различных натуральных чисел, меньших $2n$, есть три числа, одно из которых равно сумме двух других.

6*. Докажите, что среди любых n натуральных чисел, не делящихся на n, есть несколько чисел, сумма которых делится на n.

7*. Докажите, что в последовательности, состоящей из 2^n натуральных чисел, произведение которых имеет не более чем n различных простых делителей, либо один из членов, либо произведение двух членов является квадратом натурального числа.

8*. Сумма натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ равна 48. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно или несколько последовательных, сумма которых равна 12. При каких значениях k, кроме 12, из любых натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, сумма которых равна 48, можно выбрать одно или несколько последовательных, сумма которых равна k?

9*. Докажите, что любая последовательность, состоящая из $mn+1$ вещественных чисел, содержит возрастающую подпоследовательность из $m+1$ чисел или убывающую подпоследовательность из $n+1$ чисел.

10*. Дана прямоугольная таблица, в каждой клетке которой написано вещественное число, причем в каждой строке таблицы числа расположены в порядке возрастания. Докажите, что если расположить числа в каждом столбце таблицы в порядке возрастания, то в строках полученной таблицы числа по-прежнему будут располагаться в порядке возрастания.

11*. Дано N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две из этих точек соединены отрезком, и каждый отрезок окрашен в один из данных k цветов. Докажите, что, если $N > [k!e]$, то среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет.

10.6. *«Непрерывный» принцип ящиков.* Если фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_n$ с площадями $S_1, S_2, \ldots, S_n$ содержатся в фигуре F с площадью S и $S_1 + S_2 + \ldots + S_n > kS$,

то некоторые $k + 1$ из фигур $F_1, F_2, \ldots, F_n$ имеют общую точку.

1. В квадрате со стороной 1 отмечено 64 точки. Докажите, что некоторые три из них можно покрыть одним кругом радиуса 1/8.

2. В круге радиуса 16 отмечено 650 точек. Докажите, что некоторые десять из них можно покрыть кольцом, внутренний радиус которого равен 2, а внешний радиус равен 3.

3**. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры меньше, чем 0,34. Докажите, что площадь этой фигуры меньше, чем 0,29.

10.7. *Инвариант.* В каждой из предлагаемых задач задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено производить над этим объектом. При этом требуется доказать, что в результате этих преобразований объект нельзя привести к некоторому определенному виду. Это можно сделать, подобрав такую характеристику объекта, которая не меняется при указанных преобразованиях. Такую характеристику называют *инвариантом преобразований.*

1. Каждое из чисел от 1 до 1 000 000 заменили суммой его цифр. С полученным набором чисел проделали то же самое и так далее до тех пор, пока не получился набор, состоящий из миллиона однозначных чисел. Каких чисел в получившемся наборе больше: единиц или двоек?

2. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус — в противном случае. Докажите, что последний оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

3*. В каждой клетке таблицы 8×8 написано целое число. Разрешается выбирать в таблице любой квадрат размерами 3×3 или 4×4 и увеличивать на 1 каждое из чисел, стоящих в клетках выбранного квадрата. Всякую ли таблицу можно с помощью таких операций преобразовать в таблицу, в которой все числа делятся на 3?

4. Круг разбит на десять секторов, в каждом из которых стоит по фишке. Одним ходом разрешается любые две фишки передвинуть в соседние секторы. Докажите, что не удастся собрать все фишки в одном секторе.

5*. На пересечении первой строки и второго столбца таблицы 4×4 стоит минус, а в остальных клетках этой таблицы стоят плюсы. Разрешается изменять знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей таблицы (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы раз мы ни производили такие операции, в таблице останется хотя бы один минус.

6*. Числа 1, 2, ..., n расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что, если проделать нечетное число таких операций, то полученное расположение чисел 1, 2, . . ., n будет отлично от первоначального.

7. Докажите, что утверждение п. 6 останется справедливым, если разрешить менять местами любые два числа в перестановке.

8*. В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автолюбителей. По правилам гонки автолюбители могут обгонять друг друга, но при этом запрещен двойной обгон. Автолюбители финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.

9*. Числа 1, 2, . . ., n записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и поменять местами самое левое из них с самым правым, а второе слева — со вторым справа. Докажите, что, если $n(n-1)/2$ — четное число, то с помощью описанных операций можно прийти к расположению n, $n-1$, . . ., 3, 2, 1; если же $n(n-1)/2$ — нечетное число, то к такому расположению прийти нельзя.

10.8. В этих задачах, как и в предыдущих, задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено над ним производить. При этом либо требуется доказать, что, как бы мы ни производили эти преобразования, через конечное число шагов обязательно получится объект вполне определенного вида, либо доказать, что мы можем прийти к объекту требуемого вида, специальным образом выбрав последовательность, в которой эти преобразования производятся. Инструментом доказательства служит такая числовая характеристика объекта, которая монотонно изменяется при заданной последовательности

преобразований и может принимать лишь конечное число различных значений.

1. Непустые конечные множества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ состоят из целых чисел, причем при $n \geqslant 2$ каждый элемент множества A_n является средним арифметическим двух или более элементов множества A_{n-1}. Докажите, что в этой последовательности конечное число множеств.

2. В строчке подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом a первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз a встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом b второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз b встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой — пятая и так далее. Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

3. В каждой клетке прямоугольной таблицы написано натуральное число. За один ход разрешается удвоить все числа какой-нибудь строки или же вычесть единицу из всех чисел какого-нибудь столбца. Докажите, что за несколько ходов можно получить таблицу, в которой все числа равны 0.

4*. Задано несколько красных и несколько синих точек, некоторые из которых соединены между собой. Точка называется особой, если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. За один шаг выбирается произвольная особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

5*. На плоскости заданы n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая красная точка соединена отрезком с одной из синих точек, причем разные красные точки соединены с разными синими. Если $[AC]$ и $[BD]$ пересекаются, причем точки A и B — красные, а C и D — синие, то разрешается заменить эти отрезки отрезками $[AD]$ и $[BC]$. Докажите, что через конечное число шагов никакие два отрезка не будут иметь общих точек.

6*. В каждой клетке прямоугольной таблицы написано вещественное число. За один ход разрешается заменить на противоположные все числа некоторой строки или некоторого столбца. Докажите, что за несколько шагов

можно добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце стали неотрицательными.

7*. n точек на плоскости таковы, что круг радиуса 1 с центром в любой из этих точек содержит не менее, чем $(n+2)/2$ данных точек. Докажите, что эти точки можно обозначить через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таким образом, что каждое из расстояний $|A_1A_2|, |A_2A_3|, \ldots, |A_nA_1|$ не больше 1.

§ 2. Перебор вариантов

10.9. *Правило произведения.* Предположим, что нам нужно подсчитать количество предметов, удовлетворяющих некоторым условиям. Предположим, что построение произвольного такого предмета мы разбили на n последовательных шагов, причем на первом шаге у нас есть выбор из a_1 возможностей; независимо от результата первого шага, у нас есть a_2 различных возможностей на втором шаге; независимо от результатов первых двух шагов, есть a_3 способов осуществления третьего шага и т. д.; наконец, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть a_n возможностей осуществления последнего шага. Тогда общее количество пересчитываемых предметов равно произведению $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$.

1. В русском алфавите 20 согласных и 10 гласных букв. Сколько можно составить различных слогов из двух букв, первая из которых согласная, а вторая гласная?

2. Из города A в город $Б$ ведут 5 дорог, а из города $Б$ в город $В$ — 7 дорог. Сколько есть различных маршрутов поездки из города A в город $В$ через город $Б$?

3. Сколько есть различных двузначных чисел, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 0, 2, 5?

4. Сколько есть различных двузначных чисел, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 1, 3, 7?

5. В меню столовой имеется 7 первых, 9 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

6. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (содержащего 33 буквы) и четырех цифр. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

7. У рояля 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

8. Сколько различных натуральных делителей имеет число $n = 2^7 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?

9. На координатной плоскости рисуются всевозможные несамопересекающиеся ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n. Докажите, что $4 \cdot 2^{n-1} \leqslant L_n \leqslant 4 \cdot 3^{n-1}$.

10. Сколько есть пятизначных чисел, оканчивающихся двумя семерками?

11. Сколько есть шестизначных чисел, начинающихся с двух одинаковых цифр?

12. Сколько есть четырехзначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр?

13. Сколько есть пятизначных чисел, в каждом из которых соседние цифры различны?

14. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 4, в записи которых не используются цифры 0, 4, 6, 8?

15. Сколько есть шестизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр, а вторая и четвертая цифры нечетны?

16. Сколько есть шестизначных чисел, в записи которых две цифры 1 и по одной цифре 2, 3, 4, 5?

17. Сколько есть семизначных чисел, в записи которых четыре цифры 5 и по одной цифре 0, 7, 8?

10.10. *Число подмножеств.*

1. Сколько есть подмножеств в множестве из m элементов?

2. Сколькими способами в множестве из m элементов можно выбрать два непересекающихся подмножества?

3. Сколько есть натуральных чисел, в десятичной записи которых каждая цифра равна 0 или 1, причем число единиц равно m, и никакие два нуля не стоят рядом?

10.11. *Число перестановок.* Расположение элементов множества в некотором порядке называют *перестановкой* этого множества. Число перестановок множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

1. Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников?

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

3. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 3 занимает третье место, а цифра 5 — пятое?

4. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 1 следует непосредственно за цифрой 0?

5. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых трех мест, а цифра 1 — одно из последних четырех мест?

6. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых пяти мест, а цифра 1 — одно из первых трех мест?

7. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых между цифрами 0 и 1 стоят ровно три цифры?

8. На полке нужно расставить три пятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний сочинений стояли подряд, хотя и необязательно в порядке следования номеров томов. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка — справа?

10. Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы каждый мальчик сидел за одной партой с девочкой?

11. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 0 расположена левее цифры 1?

12. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 1 расположена между цифрами 0 и 2?

13. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 0 расположена левее цифр 1, 2, 3 а цифра 1 — левее цифры 2?

10.12. В некоторых случаях для того, чтобы найти число элементов конечного множества, обладающих требуемым свойством, удобно найти сначала число элементов, не обладающих этим свойством, и затем вычесть это число из числа элементов множества.

1. Сколько есть пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

2. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых хотя бы одна из первых трех цифр делится на 3?

3. Сколько есть пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть одинаковые цифры?

10.13. В некоторых случаях при подсчете числа предметов, обладающих требуемыми свойствами, не удается

непосредственно применить правило произведения (см. задачу 10.9), однако удается разбить множество пересчитываемых предметов на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. После этого остается сложить получившиеся числа.

1. Сколько есть натуральных чисел, меньших 10^5, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

2. Алфавит состоит из 10 букв. «Словом» называется любая последовательность букв этого алфавита, в которой никакая буква не встречается три раза подряд. Сколько есть слов, состоящих не более, чем из четырех букв?

3. Сколько есть четных пятизначных чисел, в каждой из которых нет одинаковых цифр?

4. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 25, в каждом из которых соседние цифры различны?

5. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра 1 — одно из шести последних мест?

6. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых цифры 0 и 1 стоят рядом, а цифры 1 и 2 не стоят рядом?

7. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, . . ., 9, в которых между цифрами 0 и 1 стоят ровно 3 цифры, а между цифрами 1 и 2 — ровно две цифры?

10.14. *Число «счастливых билетов».*

1. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x + y = n$?

2. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет система уравнений $x + y = z + t = n$?

3. Каждая из 10 000 карточек занумерована последовательностью из четырех цифр (от 0000 до 9999). Сколько есть карточек с такими номерами, у которых сумма первых двух цифр равна сумме двух последних цифр?

4. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x + y + z = n$?

5. Каждая из миллиона карточек занумерована последовательностью из шести цифр (от 000 000 до 999 999). Сколько есть карточек с такими номерами, у которых сумма первых трех цифр равна сумме трех последних цифр?

10.15. *Разбиение на группы.* В каждой из предлагаемых задач имеется правило, в соответствии с которым

некоторые перестановки данного конечного множества отождествляются. При этом все перестановки данного множества разбиваются на группы таким образом, что перестановки из одной группы считаются одинаковыми, а перестановки из разных групп — разными. Если при этом во всех группах одно и то же число элементов, то для того, чтобы найти число разных перестановок, нужно число всех перестановок данного множества разделить на число перестановок, попавших в одну группу.

В некоторых случаях правило отождествления перестановок задается явно, в других случаях его нужно разумным образом ввести, решая задачу.

1. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если при этом: а) для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, кто является его соседом справа и кто является его соседом слева; б) для каждого человека важно лишь то, кто является его соседями (и не важно, кто из этих соседей сидит справа, а кто — слева); в) для каждого человека важно лишь то, кто сидит напротив него.

2. $ABCD$ — квадрат. Каждый из отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AC]$ требуется окрасить в один из данных пяти цветов, причем все цвета должны быть использованы. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением. Сколько есть различных раскрасок?

3*. Сколько различных фигур можно построить из данного правильного n-угольника и n кругов попарно различных радиусов, если каждая сторона n-угольника должна касаться в своей середине одного и только одного из данных кругов? Две фигуры считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением.

4*. Для банкета на 100 человек приготовлено три восьмиместных, четыре десятиместных и два восемнадцатиместных круглых стола. Два варианта расположения людей за этими столами считаются одинаковыми, если у каждого человека в обоих вариантах один и тот же сосед слева и один и тот же сосед справа. Сколько есть различных вариантов расположений ста человек за этими столами?

5. Сколько есть пятизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается два раза, а цифры 2, 3 и 4 — по одному разу?

6. Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слова «косогор»?

7. Сколько есть шестизначных чисел, в записи которых цифры 1 и 2 встречаются по два раза, а цифры 3 и 4 — по одному разу?

8. Сколько есть семизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается трижды, а цифра 5 — дважды?

9. Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слова «колокольчик»?

10*. m различных шаров распределяют по n различным ящикам таким образом, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар. Докажите, что число таких распределений делится на $n!$.

11. Сколько различных последовательностей длины n можно получить из k единиц и $(n-k)$ нулей?

12. Сколько различных последовательностей длины n можно получить из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, . . ., k_s букв a_s $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$?

§ 3. Биномиальные коэффициенты

10.16. Число k-элементных подмножеств n-элементного множества обозначается C_n^k и при $0 \leqslant k \leqslant n$ вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (см. п. 11 задачи 10.25).

1. Вычислите: C_7^2, C_{20}^0, C_{40}^1, C_{35}^{35}, C_8^4, C_{15}^{13}.

2. Решите уравнения: $C_n^2 = 28$, $C_n^{n-3} = 20$, $C_{30}^n = 435$.

Выясните, сколько есть подмножеств X множества $\{0; 1; 2; \ldots; 9\}$, удовлетворяющих условиям:

3. Множество X состоит из трех элементов.

4. Множество X состоит из пяти элементов и $1 \in X$.

5. Множество X состоит из шести элементов и $2 \notin X$.

6. Множество X состоит из семи элементов, $0 \in X$, $1 \in X$ и $2 \notin X$.

7. Множество X состоит из двух четных и трех нечетных чисел.

8. В множестве X не менее семи элементов.

10.17. На окружности последовательно отмечены точки A_1, A_2, . . ., A_{12}. Вычислите:

1. Число хорд с концами в отмеченных точках.

2. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

3. Число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках.

4. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой (A_2A_8).

5. Число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой (A_1A_5).

10.18. l, m — параллельные прямые, $l \neq m$. На прямой l отмечено 8 точек, а на прямой m — 11 точек. Вычислите:

1. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

2. Число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках (три вершины четырехугольника не должны лежать на одной прямой).

3. Число несамопересекающихся шестнадцатизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках, звенья которых не лежат на прямых l и m.

4. Число несамопересекающихся десятизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках, звенья которых не лежат на прямых l и m.

10.19. *Шары в ящиках.*

1. Имеется шесть различных ящиков, четыре неразличимых белых шара и три неразличимых черных шара. Сколькими способами можно разложить все шары по ящикам так, чтобы в каждом был хотя бы один шар?

2*. Имеется десять различных ящиков, шесть неразличимых белых шаров и шесть неразличимых черных шаров. Сколькими способами можно разложить все шары по ящикам так, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар?

10.20. *Разбиение числа на слагаемые.*

1. Докажите, что число различных последовательностей из m нулей и n единиц равно C_{m+n}^{m}.

2*. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ в неотрицательных целых числах равно C_{m+n-1}^{m-1}.

3. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ в натуральных числах равно C_{n-1}^{m-1}.

4. Сколькими способами можно разложить 15 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы оказалось не более двух пустых ящиков?

5. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее двух шаров?

6. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не более 5 шаров?

10.21. *Формула включения и исключения* (продолжение задачи 10.3).

1*. Докажите, что число таких перестановок $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ чисел $(1; 2; \ldots; n)$, которые удовлетворяют условию $a_k \neq k$ при всех k, равно $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2*. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 в восемь цветов так, чтобы клетки, имеющие общую сторону, были бы окрашены в разные цвета и чтобы в каждом горизонтальном ряду встречались все восемь цветов?

3*. m различных шаров распределяют по n различным ящикам таким образом, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар. Докажите, что при $m \geqslant n$ число таких распределений равно

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C_n^k.$$

4. Докажите тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n-k)^n}{k! (n-k)!} = 1.$$

10.22. *Треугольник Паскаля.* Числовым треугольником будем называть таблицу, в верхней строке которой написано одно число, а в каждой следующей строке — на одно число больше, чем в предыдущей. Строки такой таблицы будем нумеровать последовательными целыми числами, начиная с 0, так что n-я строка будет состоять из $n+1$ чисел. Числа в каждой строке также будем нумеровать, начиная с 0, и обозначать T_n^k, где n — номер строки, k — номер числа в строке. Числовой треугольник, удовлетворяющий условиям

$$T_n^0 = T_n^n = 1, \quad T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

называется *треугольником Паскаля.*

1. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля.

2. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля, стоящих на четных местах.

3. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля, стоящих на нечетных местах.

4*. Докажите, что в n-й строке треугольника Паскаля нет четных чисел в том и только в том случае, если $n + 1$ — целая степень числа 2.

5*. Натуральные числа n и k таковы, что $n < 2^k$. Докажите, что в строке треугольника Паскаля с номером $n + 2^k$ нечетных чисел вдвое больше, чем в строке с номером n.

6. Докажите, что число нечетных чисел в любой строке треугольника Паскаля есть целая степень числа 2.

10.23. *Треугольник Паскаля* (продолжение).

1. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$.

2. Докажите, что $T_n^k = C_n^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Упростите:

3. $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k \, (m < n)$. 4. $\sum\limits_{k=l}^{m} (-1)^k C_n^k \, (m < n)$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^n$. 6. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^p \, (n > p)$.

10.24. *Полиномиальная теорема.*

1. Докажите, что полином $(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n$ равен сумме всевозможных одночленов вида $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — неотрицательные целые числа, сумма которых равна n. Найдите разложения следующих полиномов:

2. $(2x - y)^4$. 3. $\left(\frac{a}{2} + 2b\right)^5$.

4. $(x^2 + x + 1)^2$. 5. $(x - a + 1)^2$.

6. $(a - b - c)^3$. 7. $(1 - x + xy)^4$.

Найдите коэффициент при x^k в разложении полиномов:

8. $(x + 2)^{10}$, $k = 3$. 9. $(1 - 2x)^7$, $k = 4$.

10. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8$, $k = -5$.

11. $(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x})^9$, $k = 11$.

12. $(x^2 - x + 1)^8,\ k = 7.$

13. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^6,\ k = 2.$

10.25. Числа C_n^k являются коэффициентами формулы бинома:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Докажите тождества:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$

3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k C_n^k = 1.$

4. $\sum\limits_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n.$

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}.$

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0.$

7. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k 2^{k-1} C_n^k = n.$

8. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$

9. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$

10. $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^n C_{2n-1}^k 2^k}{k+1} = 0.$

11. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

12. $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$

13. $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$

14. $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (C_{2n-1}^k)^2 = 0.$

15. $\sum\limits_{k=0}^{p} C_m^k C_n^{p-k} = C_{m+n}^p.$

Глава 11

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действия над комплексными числами

11.1. Множество вещественных чисел можно расширить до большего множества, в котором по-прежнему выполнимы четыре арифметических действия, подчиняющиеся обычным законам, а кроме того, разрешимы все квадратные уравнения. Элементы этого множества

называют *комплексными числами*. Обозначив через i один из корней уравнения $x^2 = -1$, каждое комплексное число можно единственным образом записать в виде $a + bi$, где a и b — вещественные числа. Комплексные числа складываются и перемножаются по следующим правилам: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$; $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Вычислите:

1. $(3 - 2i) + (5 + 3i)$. 2. $(1 + 2i) - (3 - i)$. 3. $3(2 - i)$.
4. $i(i - 1)$. 5. $(1 + 3i)(-7 + 2i)$. 6. $(2 - i)^2$.
7. $(1 + 2i)^3$. 8. i^4. 9. i^{31}. 10. $(1 + i)^{20}$.

11.2. Нахождение обратного числа z^{-1} к комплексному числу $z = a + bi \neq 0$ производится по формуле $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$. Деление числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ производится как умножение числа z_1 на число, обратное z_2, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$. Вычислите:

1. $\frac{1}{1 - i}$. 2. $\frac{5}{1 + 2i}$. 3. $\frac{2i - 3}{1 + i}$.
4. $\frac{2 + 3i}{i}$. 5. i^{-5}. 6. $(1 + i)^{-10}$.

11.3. Комплексные числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Найдите вещественные решения уравнений:

1. $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$.
2. $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$.

11.4. *Комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ называется число $\bar{z} = a - bi$.

Докажите следующие свойства операции комплексного сопряжения:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. 2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
3. $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$. 4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. 5. $\bar{\bar{z}} = z$.

11.5. Функция φ определена на множестве всех комплексных чисел и принимает комплексные значения. Докажите, что если для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполнены равенства

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \quad \varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$$

и $\varphi(a) = a$ для любого вещественного a, то либо $\varphi(z) = z$ при всех z, либо $\varphi(z) = \bar{z}$ при всех z.

11.6. Число z является вещественным в том и только в том случае, если $z = \bar{z}$. Докажите, что следующие

числа вещественны:

1. $z + \bar{z}$.   2. $z \cdot \bar{z}$.   3. $\frac{1}{i}(z - \bar{z})$.

4. $\frac{z^2 + \bar{z}}{z^3 - \bar{z}} - \frac{z + \bar{z}^2}{z - \bar{z}^3}$.   5. $\frac{z - 1}{i(z + 1)}$, если $z \cdot \bar{z} = 1$.

11.7. Извлечение квадратного корня из комплексного числа $z = a + bi$ производится решением уравнения $(x + yi)^2 = a + bi$. Найдите квадратные корни из следующих комплексных чисел z:

1. $z = -4$. 2. $z = i$. 3. $z = 3 + 4i$.

§ 2. Комплексная плоскость

Рассмотрим на плоскости декартову систему координат $(x; y)$. Каждому комплексному числу $z = x + yi$ можно сопоставить точку плоскости с координатами $(x; y)$. При таком сопоставлении получается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Часто отождествляют комплексные числа и соответствующие точки плоскости (так же, как отождествляют вещественные числа и точки числовой оси). При этом плоскость называют *комплексной плоскостью*.

11.8. Изобразите на комплексной плоскости следующие комплексные числа z:

1. $z = 1$. 2. $z = i$. 3. $z = -2$.
4. $z = 1 - i$. 5. $z = i - 2$. 6. $z = 3 - 5i$.

11.9. Если число z изображено точкой P, то *модулем* числа z называется расстояние от точки P до начала координат O, а *аргументом* числа z называется угол, образованный осью абсцисс и лучом OP. Модуль числа z обозначается $|z|$, а аргумент — $\arg z$. Следует заметить, что при определении аргумента комплексного числа нужно соблюдать некоторые предосторожности. Если число z равно нулю (а тогда точка P совпадает с точкой O), аргумент не определен. При $z \neq 0$ аргумент числа Z определен не однозначно, а с точностью до кратного полного угла 2π. Запись $\arg z$ следует понимать как запись одного из возможных значений аргумента. Найдите модуль и аргумент следующих чисел z:

1. $z = 2$.   2. $z = -3$.   3. $z = -i$.
4. $z = 1 + i$.   5. $z = \sqrt{3} - i$.   6. $z = 1 - i\sqrt{3}$.
7. $z = i\sqrt{2}$.   8. $z = 2 - 3i$.

Изобразите на комплексной плоскости точки z, задаваемые условиями:

9. $|z| = 1$. 10. $|z| = 5$. 11. $|z| \leqslant 2$.
12. $|z| > 3$. 13. $1 \leqslant |z| \leqslant 2$. 14. $\arg z = 0$.
15. $\arg z = \pi/4$. 16. $\pi < \arg z < 3\pi/2$.

11.10. Полезно помнить, что модуль разности комплексных чисел есть расстояние между их изображениями на комплексной плоскости. Изобразите на комплексной плоскости точки z, задаваемые условиями:

1. $|z - 1| = 1$. 2. $|z - 2 + i| = 2$.
3. $|2z - 3 + 2i| = 5$. 4. $|z + i - 3| \leqslant 2$.
5. $|z - i| = |z + 1|$. 6. $|z - 2i| \leqslant |z + i - 1|$.
7. $|z - 1| + |z + 1| = 2$. 8. $|z + i| - |z - i| = 2$.

11.11. Тождества и неравенства для модулей комплексных чисел часто являются алгебраической формой записи геометрических задач. Докажите:

1. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
2. $3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$.
3. $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = n(|z|^2 + 1)$, если $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ и $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.
4. $|z_3 - z_1| - |z_3 - z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_3 - z_1| + |z_3 - z_2|$.
5. $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \leqslant 2(|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|)$.
6**. $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$.

11.12. Если комплексное число z записано в виде $z = a + bi$, то

$$|z|^2 = a^2 + b^2, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,$$

где α — одно из значений аргумента z ($z \neq 0$). Обозначим $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ через r. Преобразуем запись z:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Последняя запись называется *тригонометрической фор-*

мой комплексного числа z. Запишите в тригонометрической форме числа z из п. п. 1—8 задачи 11.9.

11.13. Тригонометрическая форма записи комплексного числа удобна для умножения и деления чисел, возведения их в степень. Основные формулы приведены в п.п. 1—3. Докажите:

1. Если $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, то $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$, т. е. при умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

2. $\dfrac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$.

3. $(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, где n — произвольное целое число (*формула Муавра*). Упростите:

4. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$. 5. $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$.

6. $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$. 7. $\left(\dfrac{1}{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}\right)^n$.

Вычислите:

8. $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \times \left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$.

9. $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$. 10. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$.

11.14. Комплексные числа z_1 и z_2, записанные в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, равны тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi k$ при некотором целом k. Это можно использовать для извлечения корня n-й степени из комплексного числа, рассматривая уравнение $t^n = z$, где z — данное комплексное число, а t неизвестно. Извлечь корни n-й степени из чисел z:

1. $n = 3$, $z = 8$.
2. $n = 3$, $z = 1 + i$.
3. $n = 4$, $z = -1$.
4. $n = 4$, $z = -4$.

11.15. *Корни из единицы.* Корни n-й степени из единицы — это комплексные числа, удовлетворяющие уравнению $z^n = 1$. Число корней n-й степени из единицы равно

n и их можно находить по формуле

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Постройте на комплексной плоскости изображения корней n-й степени из единицы при $n = 3, 4, 5, 6$.

2. Докажите, что корни n-й степени из единицы на комплексной плоскости являются вершинами правильного n-угольника.

3. Пусть z_1 и z_2 — корни n-й степени из единицы. Докажите, что тогда $z_1 \cdot z_2$ и z_1/z_2 также являются корнями n-й степени из единицы.

4. Пусть ω — фиксированный корень n-й степени из числа z, а ε — корень n-й степени из единицы. Докажите, что $\varepsilon \cdot \omega$ также является корнем n-й степени из числа z и что каждый корень n-й степени из числа z может быть записан в виде $\varepsilon \cdot \omega$ при некотором ε, являющемся корнем n-й степени из единицы.

11.16. *Кубические корни из единицы.* Кубические корни из единицы удовлетворяют уравнению $z^3 = 1$. Один из них равен 1. Два других удовлетворяют уравнению $z^2 + z + 1 = 0$. Их можно записать в алгебраической форме $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ и в тригонометрической $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Обозначим один из невещественных корней через ω. Тогда другой можно записать как $\overline{\omega}$, или ω^2, или ω^{-1}.

1. Вычислите ω^5, ω^{-10}, ω^{36}.

2. Вычислите $\omega^{100} + \omega^{200} + \omega^{300}$.

3. Докажите, что $(a + b\omega + c\omega^2)^n + (a + b\omega^2 + c\omega)^n$ является вещественным числом при любых вещественных a, b, c и натуральном n.

4. Докажите тождество $a^3 + b^3 = (a + b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$.

5. Докажите тождество $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$.

11.17. *Приложения к суммированию.* Разложение двучленов $(a + b)^n$ по формуле бинома Ньютона позволяет получить интересные формулы, подставляя вместо a и b различные комплексные числа и вычисляя n-ю степень по формуле Муавра. С помощью разложения $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ найдите:

1. Разложение $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$;

2. Аналогичное разложение для $\cos 5\alpha$, $\sin 5\alpha$.

Используя разложение $(1+i)^n$, найдите следующие суммы:

3. $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 + \ldots + C_{100}^{100}$.

4. $C_{99}^1 - C_{99}^3 + C_{99}^5 - \ldots - C_{99}^{99}$.

Докажите тождества:

5*. $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$.

6*. $C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\sin\frac{n\pi}{6}$.

7*. $C_n^0\cos\alpha + C_n^1\cos 2\alpha + \ldots + C_n^n\cos(n+1)\alpha =$
$$= 2^n\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+2)\alpha}{2}.$$

8*. Используя разложение $\left(z + \frac{1}{z}\right)^n$ при $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, выведите формулы, выражающие $\cos^n\alpha$ через $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha, \ldots, \cos n\alpha$.

§ 3. Корни многочленов

Каждый многочлен с комплексными коэффициентами (отличный от постоянной) имеет хотя бы один комплексный корень. Это утверждение носит название *основной теоремы алгебры*. Оно было впервые доказано Гауссом в конце XVIII века. С тех пор придумано много доказательств теоремы Гаусса, но все они используют какие-то свойства функций комплексной переменной. Принимая эту теорему без доказательства, можно вывести ряд утверждений о разложении многочленов на множители, распределении их корней.

11.18. *Разложение многочлена на линейные множители с комплексными коэффициентами.* Используя теорему Безу (см. задачу 3.30), докажите, что многочлен $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с комплексными коэффициентами можно представить в виде $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

11.19. Разложите на линейные множители следующие многочлены:

1. $x^2 + 1$. 2. $x^2 - 2x + 5$.

3. $x^3 + 1$. 4. $x^3 + x - 2$. 5. $x^4 + 1$.

6. $x^4 + x^2 + 1$. 7. $x^n - 1$.

11.20. *Кратность корня.* Если число a является корнем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x - a$. Пусть k — наивысшая степень бинома $x - a$, на которую делится многочлен $f(x)$. Это означает, что $f(x)$ делится на $(x - a)^k$, но не делится на $(x - a)^{k+1}$. Такое число k называется *кратностью корня* a.

1. Докажите, что многочлен $f(x)$ со старшим коэффициентом a_n может быть представлен в виде

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_s)^{k_s},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — все его различные корни, а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — их кратности.

2. Докажите, что многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней, если каждый из них учитывать столько раз, какова его кратность.

3. Пусть $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, a — его вещественный корень кратности $k > 1$. Докажите, что a является корнем производной $f'(x)$ кратности $k - 1$.

Замечание. В последней задаче требование вещественности коэффициентов и корня несущественно. Можно определить производную многочлена с комплексными коэффициентами, и тогда утверждение задачи останется верным.

4. Найдите кратность корня $x = 1$ для многочлена

$$x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1.$$

5. Найдите коэффициенты a и b так, чтобы многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делился на $(x - 1)^2$.

6. Корень многочлена называется *кратным*, если его кратность больше единицы. Докажите, что многочлен

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x}{1} + 1$$

не имеет кратных корней.

11.21. *Многочлен с вещественными коэффициентами.* Пусть $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами.

1. Пусть α — комплексный корень многочлена $f(x)$. Докажите, что комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}$ также является корнем многочлена $f(x)$.

2. Пусть α — комплексный корень многочлена $f(x)$ кратности k. Докажите, что кратность $\bar{\alpha}$ тоже равна k.

3. Докажите, что $f(x)$ можно разложить на линейные и квадратные множители с вещественными коэффициентами.

11.22. Разложите на линейные и квадратные множители с вещественными коэффициентами следующие многочлены:

1. $x^6 + 27$. 2. $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.
3. $x^{2n} - 1$. 4. $x^{2n+1} + 1$.

11.23. *Теорема Виета.* Раскладывая многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ на линейные множители $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим соотношения, известные учащимся для квадратного трехчлена:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_0.$$

Эти соотношения позволяют вычислять симметрические выражения от корней многочлена, не находя сами корни.

Пусть x_1, x_2, x_3— корни многочлена $x^3 + 2x^2 - x - 5$. Вычислите: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $S_3 = x_1x_2x_3$, $S_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $S_5 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $S_6 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$.

Глава 1

1.1. 4. Воспользуйтесь тем, что существует лишь конечное число различных остатков от деления на данное натуральное число.

6. Докажите, что среди чисел $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^q$ есть два, дающие одинаковый остаток при делении на q, и рассмотрите их разность.

8. Докажите сначала утверждение задачи для дробей вида $0,(00\ldots01)$.

1.2. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha = 0, c_1c_2\ldots$ и пусть c_k — первая цифра числа α, меньшая соответствующей цифры числа β. Тогда рациональное число $r = 0, c_1c_2\ldots c_{k-1}(c_k + 1)00\ldots$ находится между α и β. Если s — рациональное число между $\alpha/\sqrt{2}$ и $\beta/\sqrt{2}$, то $s\sqrt{2}$ — иррациональное число между α и β.

1.3. В каждой из задач покажите, что данная десятичная дробь содержит сколь угодно длинные отрезки, состоящие только из нулей.

1.4. 1. Так как $2,30114 \leqslant \alpha \leqslant 2,30115$ и $0,23761 \leqslant \beta \leqslant 0,23762$, то $2,53875 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 2,53877$. Следовательно, $\alpha + \beta = 2,5387\ldots$

1.5. 1. Если $0 < x < 1$, то $x < \sqrt{x} < 1$.

2. $\sqrt{26} - 5 = \dfrac{1}{\sqrt{26} + 5}$.

3. $(5 + \sqrt{26})^{20} + (5 - \sqrt{26})^{20}$ — целое число.

1.6. 1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \geqslant \sqrt{11} \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{6} + 3 \geqslant 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \geqslant 6 \Leftrightarrow 6 \geqslant 9$. Следовательно, $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 11$.

1.7. 1. Пусть $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Тогда $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $\sqrt{6} = \dfrac{a^2 - 5}{2}$. Если a — рациональное число, то $\sqrt{6}$ — рациональное число.

1.8. 2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$

$$= \frac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}.$$

1.9.1. Можно считать, что $x \geqslant y$. Тогда

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{x}-\sqrt{y} \Leftrightarrow 7-2\sqrt{10} = x+y-2\sqrt{xy}.$$

Так как $\sqrt{10}$ — иррациональное число, то последнее равенство возможно лишь при $x+y=7$, $xy=10$, откуда $x=5$, $y=2$.

1.11. 1. Пусть $\varphi(0)=a$. Тогда $\varphi(1)=a+1$ или $\varphi(1)=a-1$. Докажите, что, если $\varphi(1)=a+1$, то $\varphi(x)=a+x$ при всех x, а если $\varphi(1)=a-1$, то $\varphi(x)=a-x$ при всех x. Воспользуйтесь тем, что $|\varphi(x)-a|=|x|$ и $|\varphi(x)-\varphi(1)|=|x-1|$.

2. Такое перемещение должно задаваться формулой вида $\varphi(x)=a-x$, где a — рациональное число. Тогда $\varphi(\sqrt{2}) = a-\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$. Пусть r — рациональное число между $a-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Покажите, что как предположение $\varphi(r) > \sqrt{2}$, так и предположение $\varphi(r) < \sqrt{2}$ приводят к противоречию.

3. Возьмите в качестве A_1 множество всех рациональных чисел из промежутков $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, $[-3-\sqrt{2};\ -3+\sqrt{2}]$, $[-6-\sqrt{2};\ -6+\sqrt{2}]$, ..., а в качестве B_1 множество всех рациональных чисел из промежутков $[3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}]$, $[6-\sqrt{2};\ 6+\sqrt{2}]$, $[9-\sqrt{2};\ 9+\sqrt{2}]$, ...

1.12. 2. $\dfrac{1}{bd} = \dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{m}{n}\right)+\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{a}{b}\right) \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{nd}+\frac{1}{nb} = \frac{b+d}{nbd},$$

откуда $b+d \leqslant n$. Так как дробь m/n не входит в последовательность F_{n-1}, то $b+d=n$, и потому $\dfrac{c}{d}-\dfrac{m}{b+d}=\dfrac{1}{nd}$. Отсюда легко получить, что $m=a+c$.

Глава 2

2.3. — 2.6. Разбивайте числовую ось на промежутки, на каждом из которых все участвующие в задаче кусочно-линейные функции линейны, и исследуйте задачу на каждом из этих промежутков.

2.7. 5. Если $y<0$, то $|x|=-1$, что невозможно; если $y=0$, то $x=0$; если $y>0$, то $|x|=1$, откуда $x=\pm 1$.

2.8. 5. Прямые $x+y+1=0$ и $x-2y=0$ разбивают плоскость на четыре области (см. рис. 3). Так как в области I выполнены

неравенства $y \geqslant -x-1$ и $y \geqslant \frac{1}{2}x$, то неравенство принимает вид: $x+y+1+2y-x \leqslant 4 \Leftrightarrow y \leqslant 1$, так что в искомую фигуру входят те точки области I, которые лежат на прямой $y=1$ или ниже нее. Аналогично рассматриваются области II, III, IV.

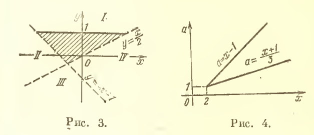


Рис. 3. Рис. 4.

2.9. 1. Откладывая на оси абсцисс значения x, а на оси ординат — значения a, найдем на координатной плоскости фигуру, задаваемую уравнением (см. рис. 4). Решения уравнения при заданном значении a — это абсциссы тех точек этой фигуры, ордината которых равна a. Мы видим, что при $a<1$ уравнение не имеет решений, при $a=1$ у него один корень $x=2$, а при $a>1$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнений $a=x-1$ и $a=\frac{x+1}{3}$; $x=a+1$ и $x=3a-1$.

3. Задачу можно переформулировать так: при каких значениях a неравенство $2|x+a-1|-|2x-a|<2$ выполняется при всех x. Изобразив фигуру, задаваемую этим неравенством, нетрудно выяснить, при каких значениях a прямая, перпендикулярная оси ординат и проходящая через точку с ординатой a, целиком помещается в полученной фигуре.

2.10. 8. $$\frac{1-x}{3x+2}=\frac{\frac{5}{3}-\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}=-\frac{1}{3}+\frac{5}{9\left(x+\frac{2}{3}\right)},$$

и поэтому график функции $y=\frac{1-x}{3x+2}$ получается параллельным переносом гиперболы $y=\frac{5}{9x}$ на вектор с координатами $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

2.14. 1. $\left|\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right|=$ $=2\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2-$ $-2\sqrt{x^2+y^2+4-2\sqrt{2}(x+y)}\sqrt{x^2+y^2+4+2\sqrt{2}(x+y)}=$ $=8\Leftrightarrow(x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+4)^2-8(x+y)^2\Leftrightarrow xy=1.$

2. Гипербола $xy = 1$ переходит в гиперболу $xy = k$, где $k > 0$, при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\sqrt{k}$. При $k < 0$ нужно произвести гомотетию с коэффициентом $\sqrt{-k}$, а затем — симметрию относительно оси абсцисс.

Глава 3

3.3. 2. Произведем параллельный перенос координатных осей так, чтобы точка C стала началом координат. Тогда, если $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — координаты точек A и B, то коэффициенты a и b искомой квадратной функции $y = ax^2 + bx$ задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 = y_2. \end{cases}$$

3.5. 4. Положив $t = x^2 - x$ и учтя, что область значений этой квадратной функции — промежуток $[-1/4; +\infty)$, мы придем к задаче нахождения области значений квадратной функции $y = (t-3)^2 - 2t + 1$ при $t \geqslant -1/4$.

3.7. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — это абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -px - q$. На рис. 5 изображена фигура, образованная всеми прямыми $y = -px - q$, где $-1 \leqslant p \leqslant 1$, $-1 \leqslant q \leqslant 1$.

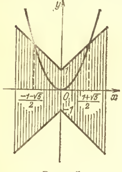


Рис. 5.

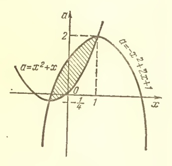


Рис. 6.

3.8. См. 2.8.

3.9. 2. $x^2 + ax + y^2 + by =$

$$= c \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

3.11. 3. (См. решение 2.9.) Построим на плоскости $(x; a)$ параболы $a = x^2 + x$ и $a = -x^2 + 2x + 1$ (см. рис. 6). Данной систе-

ме удовлетворяют координаты точек заштрихованной части плоскости. Теперь легко убедиться, что при $a < -1/4$ и при $a > 2$ система не имеет решений. Если $-1/4 \leqslant a \leqslant 2$, то решения системы образуют отрезок $[x_1, x_2]$, где x_1 — меньший корень уравнения $x^2 + x - a = 0$, а x_2 — больший корень уравнения $x^2 - 2x + (a-1) = 0$, т. е. $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2-a}$.

3.12. 1. Сложите уравнения парабол.

3.14. 3. $a + b + c = f(1)$. 4. $a - b + c = f(-1)$.

5. Выясните знак левой части при $x = a$, $x = b$, $x = c$.

3.15. 2. Абсциссы точек A и B — это корни уравнения вида $x^2 = kx + b$, где b — ордината точки C.

3.16. Если в каждой из задач 1—3 обозначить через $f(x)$ левую часть уравнения или неравенства, то условия на параметр запишутся следующим образом:

1. $af(0) < 0$. 2. $af(1) < 0$.

3. $f(1) \leqslant 0$ и $f(2) \leqslant 0$.

3.17. (См. 3.16). Если $f(x)$ — левая часть, а D — ее дискриминант, то условия на a здесь записываются так:

1. $D > 0$, $f(3) > 0$, $3 > -a/2$.

3. $a > 0$, $f(-1) \leqslant 0$, $f(1) \leqslant 0$; или $a = 0$; или $a < 0$, $D \leqslant 0$; или $a < 0$, $D > 0$, $f(-1) \leqslant 0$, $-1 \geqslant -\dfrac{a+1}{a}$; или $a < 0$, $D > 0$, $f(1) \leqslant 0$, $1 \leqslant -\dfrac{a+1}{a}$.

3.18. 3. $\dfrac{x^2 - 10x + 7}{2x^2 - 1} = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)x^2 + 10x - (a+7) = 0 \\ 2x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2a-1)x^2 + 10x - (a+7) = 0.$$

Последнее уравнение имеет вещественные корни, если $2a - 1 = 0$ или $25 + (2a-1)(a+7) \geqslant 0$.

3.19. 2. Обратите внимание на то, что система уравнений $x + y = a - 1$, $xy = a^2 - 7a + 14$ имеет вещественные решения не при всех значениях a.

3.20. Докажите сначала следующее утверждение: если $-2 \leqslant a < b \leqslant 2$, то отрезок $[-2; 2]$ содержит два отрезка, на каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2$ принимает по одному разу все значения от a до b. Выведите отсюда последовательно, что отрезок $[-2; 2]$ разбивается на два отрезка, на каждом из которых функция $f(x)$ принимает все значения от -2 до 2, на четыре отрезка, на каждом из которых функция $f(f(x))$ принимает все значения от -2 до 2, и, наконец, на восемь отрезков, на каждом из которых функция $f(f(f(x)))$ принимает все значения от -2 до 2.

3.21. Используя тождество $ax^2 + bx + c = x^2\left(c\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + a\right)$, покажите, что утверждение задачи сводится к доказательству неравенства $|ax^2 + bx + c| \leqslant 2x^2$ при $|x| \geqslant 1$. Предположив для определенности, что $a \geqslant 0$, и сравнив параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = 2x^2 - 1$ при $|x| \leqslant 1$, покажите, что вне этого отрезка $ax^2 + bx + c \leqslant 2x^2 - 1$.

3.22. Дуга, высекаемая на параболе $y = x^2 - 1/2$ полосой $|x| \leqslant 1$, лежит в полосе $|y| \leqslant 1/2$. Воспользуйтесь тем, что любая другая парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает параболу $y = x^2 - 1/2$ не более, чем в одной точке.

3.23. Покажите, что значения функции $y = x^2 + px + q$ в двух соседних целых точках, лежащих по одну сторону от прямой $x = -p/2$, различаются не менее, чем на 1.

3.24. Если среди данных n чисел с суммой a не все равны между собой, то среди них есть число, меньшее, чем a/n, и число, большее, чем a/n. Сблизьте эти числа таким образом, чтобы одно из них стало равным a/n.

3.25. 3. Сложите неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + a^2 \geqslant 2ac$.

4. Воспользуйтесь предыдущим неравенством.

5. Несколько раз примените неравенство п. 3.

7. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством $2a_ia_j \leqslant a_i^2 + a_j^2$.

9. Примените неравенство п. 8 к числам $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$.

11. Возведите обе части неравенства в квадрат.

12. Возведите обе части неравенства в куб.

13. Перемножьте неравенства $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$.

14. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством п. 13.

17. Приведите неравенство к виду $\frac{1}{S - a_1} + \frac{1}{S - a_2} + \ldots + \frac{1}{S - a_n} \geqslant \frac{n^2}{n - 1}$ и примените неравенство п. 16 к числам $S - a_1$, $S - a_2, \ldots, S - a_n$.

19. Для удобства положим $a_{n+1} = a_1$. Можно считать, что a_1 — наибольшее из данных чисел. Пусть a_{i_1} — большее из чисел a_2, a_3; a_{i_2} — большее из чисел a_{i_1+1}, a_{i_1+2}; a_{i_3} — большее из чисел

a_{i_2}, a_{i_2+1} и т. д. Некоторое a_{i_s} окажется равным a_1. Тогда

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_1}{2a_{i_1}}+\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\ldots+\frac{a_{i_{s-1}}}{2a_1},$$

причем в правой сумме по крайней мере $n/2$ слагаемых. Из неравенства п. 18 следует, что эта сумма не менее $n/4$.

20. Примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического к числам $1, 2, \ldots, n$.

21. Примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического сначала к числам

$$\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{a_1 \text{ чисел}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{a_2 \text{ чисел}}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{a_n \text{ чисел}},$$

а затем к обратным числам.

22. При $m < n$ примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического к числам

$$\underbrace{1+\alpha, 1+\alpha, \ldots, 1+\alpha}_{m \text{ чисел}}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-m \text{ чисел}},$$

а при $m > n$ возведите обе части доказываемого неравенства в степень n/m и воспользуйтесь предыдущим неравенством. Неравенства п. 22 являются частными случаями неравенства Бернулли (см. задачу 7.19).

3.26. В уравнениях п.п. 3, 4 воспользуйтесь разложением квадратной функции на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3.27. Все эти уравнения решаются, если сделать удачную замену переменной. Укажем возможные замены:

1. $y = x^2$. 2. $y = x^3$. 3. $y = 2x^2 + x$.

4. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{3x - 5}$. 5. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5}$. 6. $y = x + \dfrac{3}{x}$.

7. $y = x + \dfrac{15}{x}$ (разделите на x числитель и знаменатель каждой из дробей).

8. $y = 6x^2 - 7x$ (перемножьте первую скобку с третьей а вторую — с четвертой).

9. Приведите уравнение к виду $x^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = 1$, вычтите из обеих частей $2x\dfrac{x}{x+1}$ и положите $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

3.28. 2. Уравнение однородно относительно $u = (x - 2)(x + 1)$ и $v = x - 1$.

3. Уравнение однородно относительно $u = \frac{x+1}{x-2}$ и $v = \frac{x-2}{x-4}$.

3.29. 3. Разделим обе части уравнения на x^2 ($x = 0$ не является корнем уравнения): $2\left(9x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(3x - \frac{2}{x}\right) - 25 = 0$. Положим $y = 3x - \frac{2}{x}$. Тогда $y^2 = 9x^2 + \frac{4}{x^2} - 12$, откуда $9x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 12$, и уравнение сводится к квадратному относительно y.

3.30. 2. Вычтите из левой части уравнения выражение $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0$ и разложите разность на множители, воспользовавшись тождеством п. 1.

3.31. 4. Если несократимая дробь p/q является корнем данного уравнения, то p — делитель числа -2, q — делитель числа 4, откуда следует, что все возможные значения p/q, — это ± 1, ± 2, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$. Подстановкой убеждаемся, что $x = 1/2$ — корень уравнения. Зная, что $2x - 1$ является делителем левой части уравнения, преобразуем ее к виду: $4x^3 - 2x^2 + 2x^2 - x + 4x - 2 = (2x - 1)(2x^2 + x + 2)$.

3.32. 1. Левая часть уравнения представляется в виде $(2x + 3)^3 + 6$.

2. Положив $u = x^2 - x - 2$, $v = 2x + 1$, исследуйте уравнение $u^4 + v^4 = (u + v)^4$.

3. Если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, то уравнение можно записать в виде $f(f(x)) = x$. Корнями этого уравнения являются оба корня x_1, x_2 уравнения $f(x) = x$. В силу теоремы Безу (см. задачу 3.30), многочлен $f(f(x)) - x$ имеет делителями $x - x_1$ и $x - x_2$, а следовательно, и $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x - 5$. Зная это, раскроем скобки и, приведя уравнение к виду $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0$, разложим левую часть на множители: $(x^4 + x^3 - 5x^2) + (3x^3 + 3x^2 - 15x) - (2x^2 + 2x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 0$.

3.33. Рассмотрите это уравнение как квадратное относительно a.

3.36. В системах 1 — 3 одно из уравнений позволяет выразить одно неизвестное через другое. В системах 6 — 8 либо есть однородное уравнение (см. задачу 3.28), либо можно получить однородное уравнение из уравнений системы. Так, в системе 7 можно получить однородное уравнение, умножив первое уравнение на 5, второе — на -3 и сложив получившиеся уравнения. Системы 9 — 11 решаются с помощью замены переменной $u = x + y$, $v = xy$.

12. Сложите уравнения.

13. Система линейна относительно xy, xz, yz.

14. Перемножьте уравнения (при такой операции могут появиться лишние решения и потому требуется проверка).

15. Из первого уравнения следует, что $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$.

16. Выведите из первого уравнения, что $|x| = |y|$.

17. Докажите, что $x^2 = y^2 = 1$.

18. Покажите, что $x = y = z$.

19. Из $x + y + z = 3$ следует, что $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 3$.

3.37. Решая иррациональные уравнения, следует иметь в виду, что возведение обеих частей уравнения в квадрат часто приводит к появлению лишних корней. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны, то оно равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$. Часто встречаются уравнения $f(x) = g(x)$, в которых одна из частей, скажем, $f(x)$ неотрицательна, в то время как о знаке другой части ничего определенного сказать нельзя. Такое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Кроме того, при возведении в квадрат обычно исчезает знак радикала, и потому к получающемуся уравнению (или системе) следует добавить условие неотрицательности выражения, стоявшего под знаком радикала, хотя часто это условие вытекает из других ограничений. Покажем, как некоторые из данных уравнений сводятся к системе уравнений и неравенств первой и второй степени.

2. $$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5 = x+1, \\ x^2-5 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5 = x+1, \\ x+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

3. $$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x^2, \\ x \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

8. Решая это уравнение, следует иметь в виду, что равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ верно лишь при неотрицательных a и b. Если же $a < 0$ и $b < 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\sqrt{-b}$.

3.38. 2. Положите $y = \sqrt{x-2}$. Тогда $x = y^2 + 2$.

3. Положите $y = \sqrt[12]{x}$.

4. Положите $y = \sqrt{x+1}$.

5. Равенство $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ верно лишь при $a \geqslant 0$. Если $a < 0$, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

6. Это уравнение однородно относительно $u = x$, $v = \sqrt{x+5}$ (см. задачу 3.28).

7. Воспользуйтесь равенством $x^2+2=(x+1)+(x^2-x+1)$.

3.39. 2. См. задачу 3.25 п. 3.

5. Так как равенство $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$ не выполняется ни при каком x, то в силу п. 2 данное уравнение равносильно уравнению

$$(x+1)+(x+1)+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}\cdot x\sqrt[3]{2}=2x^3.$$

3.40. В уравнениях 1 — 4 левая часть строго возрастает, а правая постоянна или убывает (в уравнении 2). В уравнении 5 покажите, что левая часть меньше 7 — наименьшего значения правой части.

3.41. Если обе части неравенства $f(x)\leqslant g(x)$ неотрицательны, то оно равносильно неравенству $f^2(x)\leqslant g^2(x)$. Если левая часть $f(x)$ неотрицательна, то неравенство $f(x)\leqslant g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f^2(x)\leqslant g^2(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Если правая часть неравенства $f(x)\leqslant g(x)$ неотрицательна, а левая часть может менять знак, то те значения x, при которых $f(x)<0$, удовлетворяют неравенству, и его можно заменить следующим условием: $\left[\begin{array}{l} f^2(x)\leqslant g^2(x), \\ f(x)<0. \end{array}\right.$ Знак [, соединяющий неравенства, означает, что множества их решений следует объединить (в то время, как знак { требует искать общие решения уравнений или неравенств). Так же, как при решении иррациональных уравнений, не забывайте о неотрицательности подкоренных выражений.

$$4.\ \sqrt{3x^2-2x-1}\geqslant 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x^2-2x-1\geqslant(2x-2)^2, \\ 2x-2<0, \end{array}\right. \\ 3x^2-2x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x^2-6x+5\leqslant 0, & (1) \\ x<1, & (2) \end{array}\right. \\ 3x^2-2x-1\geqslant 0. \quad (3) \end{cases}$$

Объединяя промежутки $[1;\ 5]$ — множество решений неравенства (1) и $(-\infty;\ 1)$ — множество решений неравенства (2), получим промежуток $(-\infty;\ 5]$. Решения неравенства (3) образуют множество $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$. Поэтому множество решений исходного неравенства равно $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;5]$. Возможен и другой подход к решению иррациональных неравенств. Продемонстрируем его на примере неравенства 6. Решим уравнение $x\sqrt{10-x^2}=x^2-6$,

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2(10-x^2)=(x^2-6)^2, \\ x(x^2-6)\geqslant 0, \end{cases}$$

решая которую, находим два корня $x=-\sqrt{2}$, $x=3$. Эти точки разбивают отрезок $[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}]$ — область определения данного неравенства — на промежутки $[-\sqrt{10};\ -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 3)$, $(3;\ \sqrt{10}]$, на каждом из которых разность $x\sqrt{10-x^2}-(x^2-6)$ сохраняет знак (в точках $-\sqrt{2}$ и 3 эта разность равна нулю). Подставляя в неравенство по одной точке из каждого промежутка (например, $x=-\sqrt{10}$, $x=0$ и $x=\sqrt{10}$), убеждаемся в том, что все точки промежутка $(-\sqrt{2};\ 3)$ удовлетворяют неравенству $x\sqrt{10-x^2}>x^2-6$, в то время как точки двух других промежутков удовлетворяют неравенству $x\sqrt{10-x^2}<x^2-6$.

8. При $x>0$ выполнено неравенство $\sqrt{x+3}>\sqrt{3}$, а при $x<0$ — неравенство $\sqrt[4]{9-x}>\sqrt{3}$.

Глава 4

4.6. Покажите сначала, что на числовой окружности бесконечно много точек вида $P(n)$, где n — целое число. Чтобы доказать, что на произвольной дуге AB есть точка такого вида (отсюда легко следует утверждение задачи), выберем дугу $A'B'$ той же длины, что и AB, содержащую, по крайней мере, две точки $P(n_1)$ и $P(n_2)$, где n_1 и n_2 — целые числа. Поворот с центром в начале координат, переводящий одну из этих точек в другую, переводит каждую точку вида $P(n)$, где n — целое число, в другую точку такого же вида. Повторив такой поворот достаточное число раз, мы найдем точку требуемого вида на дуге AB.

4.7. 8. Так как $\frac{\pi}{2}<\frac{7}{3}<\pi$, то $\operatorname{tg}\frac{7}{3}<0$.

10. Так как $-1\leqslant\sin 2\leqslant 1$, то $-\frac{\pi}{2}<\sin 2<\frac{\pi}{2}$, откуда следует, что $\cos(\sin 2)>0$.

Рис. 7.

4.9. Отметьте на числовой окружности точки $P(1)$, $P(2)$, . . ., $P(8)$ (см. рис. 7). Чтобы изобразить $\operatorname{tg} t$, проведем прямую $x=1$, называемую *линией тангенсов*; $\operatorname{tg} t$ равен ординате точки пересечения линии тангенсов с прямой $OP(t)$. Аналогично, $\operatorname{ctg} t$ ра-

вен абсциссе точки пересечения прямой OP (t) с прямой $y = 1$ — линией котангенсов (см. рис. 8).

Чтобы сравнить, к примеру, ctg 4 и tg 7, нужно сравнить длины дуг P (π) P (4) и P (7) P (π/2). Первая дуга имеет длину $4 - \pi$, вторая имеет длину $\frac{\pi}{2} + 2\pi - 7$. Неравенство $4 - \pi > \frac{5\pi}{2} - 7$ следует из неравенства $\pi < \frac{22}{7} = 3,142\ldots$ Следовательно, точка пересечения прямой OP (4) с линией котангенсов ближе к оси ординат, чем точка пересечения прямой OP (7) с линией тангенсов к оси абсцисс. Так как $\operatorname{ctg} 4 > 0$ и $\operatorname{tg} 7 > 0$, то $\operatorname{ctg} 4 < \operatorname{tg} 7$.

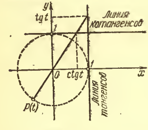


Рис. 8.

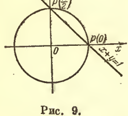


Рис. 9.

4.10. 8. Точка P (t), сумма координат которой равна 1, лежит на пересечении числовой окружности с прямой $y + x = 1$ (см. рис. 9). Таких точек две: P (0) и $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, так что решениями уравнения являются числа вида $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число.

17. Неравенству $\frac{y+x}{y-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y-x} \geqslant 0$ удовлетворяют точки из области, заштрихованной на рис. 10.

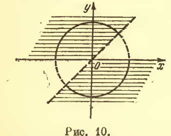


Рис. 10.

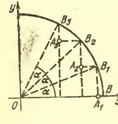


Рис. 11.

4.11. 1. Используя равенство длин отрезков BB_1, B_1B_2, B_2B_3 (см. рис. 11), докажите, что $|A_1B_1| > |A_2B_2| > |A_3B_3|$.

4.12. 3. Замените $\cos 36^\circ$ на $-\cos 144^\circ$.

4. Используйте равенства $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ$, $\cos 120^\circ = -1/2$.

4.13. 2. Так как $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ и $\sin\alpha > \cos\alpha$, то точка $P(\alpha)$ лежит во второй четверти.

4. Так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{5}{13}$, то $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

5. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha - 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 9$.

7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

8. Разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$.

4.18. 4. $\sin 64^\circ \sin 34^\circ - \sin 56^\circ \cos 116^\circ = \sin 64^\circ \cos 56^\circ + \sin 56^\circ \cos 64^\circ = \sin 120^\circ = \sqrt{3/2}$.

15. Преобразуйте произведение в сумму.

16. См. п. 3 задачи 4.12.

4.19. 5. Положите $\beta = \frac{\pi}{3} + \alpha$ и найдите $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$, зная $\sin\beta$.

8. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 2 + 2\cos(\alpha - \beta)$.

4.20. 6. $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta =$

$$= \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\alpha + 2\beta) + 1 + \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)) = 1.$$

4.21. 3. Используйте тождество п. 2.

9. $$\frac{\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\cos\alpha\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 3\alpha - \sin\alpha) + \frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}(\cos 3\alpha + \cos\alpha) - \frac{1}{2}\cos\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

11—12. Умножьте обе части тождества на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и преобразуйте произведения в суммы.

13. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4.22. 1. Воспользуйтесь равенствами $2\beta + \alpha = (\alpha + \beta) + \beta$, $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$.

3. Покажите, что доказываемое равенство равносильно равенству $\operatorname{tg}\beta = \frac{7\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha + 7\cos\alpha}$ и выведите последнее равенство из условия.

4—8. Выразите γ через α и β и перейдите к безусловному тождеству относительно α, β.

4.23. 5. $\cos A + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} - \frac{3}{2} = \cos A + \cos \hat{B} -$
$- \cos (A + \hat{B}) - \frac{3}{2} = -2\cos^2 \frac{A+\hat{B}}{2} + 2\cos\frac{A-\hat{B}}{2}\cos\frac{A+\hat{B}}{2} - \frac{1}{2}$.
Рассмотрите последнее выражение как значение квадратной функции $y = -2x^2 + 2\cos\frac{A-\hat{B}}{2}x - \frac{1}{2}$ в точке $x = \cos\frac{A+\hat{B}}{2}$.

4.27. 1. Воспользуйтесь равенством $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

4.28. Уравнения 6, 7 — однородные относительно $u = \sin x$, $v = \cos x$ (см. задачу 3.28), уравнения 8, 9 станут однородными, если умножить правую часть на $\sin^2 x + \cos^2 x$, уравнение 10 решается заменой $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, уравнения 12—14 — заменой $y = \sin x + \cos x$ или $y = \sin x - \cos x$ (в обоих случаях $\sin x \cos x$ легко выражается через y^2).

4.29. Пусть

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Тогда $a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \operatorname{tg}\alpha\cos x) =$

$$= \frac{a}{\cos\alpha}\sin(x+\alpha).$$

Так как $\cos\alpha > 0$ и $a > 0$, то

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

4.30. 3. Уравнение приводится к виду $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0$. Чтобы выяснить, какие корни уравнения $\sin 2x = 0$ удовлетворяют условию $\cos 3x \cos 5x \neq 0$, заметим, что из $\cos x = 0$ следует $\cos 3x = 0$ (и $\cos 5x = 0$), а из $\sin x = 0$ следует $|\cos 3x| = |\cos 5x| = 1$.

4. Замените $\sin 10x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$.

6. Воспользуйтесь формулой $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

8—10. Преобразуйте произведения в суммы.

11. Уравнение приводится к виду $\frac{\cos 9x}{\cos 2x \cos 7x} = 0$. Найдите все решения на промежутке $[0; \pi)$ и выясните, какие из этих решений удовлетворяют условию $\cos 2x \cos 7x \neq 0$.

14—15. Воспользуйтесь формулой из задачи 4.29.

4.31. 4. Так как $|\cos 2x - \cos 4x| \leqslant 2$, то $(\cos 2x - \cos 4x)^2 \leqslant 4$, в то время, как $4 + \cos^2 3x \geqslant 4$. Поэтому равенство $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$ возможно в том и только в том случае, если

$\cos 2x = 1$, $\cos 4x = -1$, $\cos 3x = 0$ или $\cos 2x = -1$, $\cos 4x = 1$, $\cos 3x = 0$.

7. Приведите уравнение к виду $\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg} 3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

4.32. 2. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \sin x + 2\pi k \\ \pi \cos x = \frac{\pi}{2} + \pi \sin x + 2\pi k \end{array}\right. \quad (k \text{ — целое число}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 2k + \frac{1}{2} \\ \sin x - \cos x = -\left(2k + \frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \quad (k \text{ — целое число}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4k+1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad (k \text{ — целое число}).$$

Остается заметить, что каждое из этих уравнений разрешимо лишь при $k = 0$.

3. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = k + \frac{1}{2} \ (k \text{ — целое число}) \\ \operatorname{ctg} x \text{ не является целым числом} \\ 2 \operatorname{tg} x \text{ не является нечетным числом.} \end{array}\right.$$

Уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = k + \frac{1}{2}$ сводится к квадратному уравнению с целыми коэффициентами относительно $t = \operatorname{tg} x$: $2t^2 - (2k + 1)t + 2 = 0$. Условие неотрицательности дискриминанта этого уравнения исключает значения k, равные $-2, -1, 0, 1$. Так как все запрещенные значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — рациональные числа, то выясним, какие рациональные корни может иметь полученное квадратное уравнение. В силу утверждения задачи 3.31, это могут быть числа $1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2$. Подставив каждое из них в уравнение, мы обнаружим, что запрещенные корни могут появиться лишь при $k = -3$ и при $k = 2$, и поэтому для этих значений k уравнение следует решать отдельно.

4.33. 1. $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \pi l, \end{cases}$$

(k, l — целые числа) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k + \frac{\pi l}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi l}{2} \end{cases}$ (k, l — целые числа).

4. Воспользуйтесь тем, что $\sin^2 x \geqslant \sin^4 x$, $\sin^2 y \geqslant \sin^4 y$

4.34. 4. Запишите неравенство в виде $\cos^2 t - \sin^2 t > \cos t - \sin t$ и, положив $x = \cos t$, $y = \sin t$, найдите пересечение числовой окружности с фигурой, задаваемой неравенством $x^2 - y^2 > x - y$.

5. Решите неравенство на промежутке $[0; 2\pi)$ и воспользуйтесь периодичностью.

4.35. 2—3. Воспользуйтесь формулой из задачи 4.29.

4.37. Функции 1—3 получены из синуса, тангенса, косинуса линейной заменой переменной. Для нахождения периодов функций 4, 5 можно воспользоваться следующим соображением: если a — одно из значений периодической функции $y = f(x)$, то каждый ее период является разностью некоторых двух корней уравнения $f(x) = a$.

4.38. 5. Представьте y в виде $a \sin 2x + b \cos 2x$ и воспользуйтесь формулой из задачи 4.29.

4.40. 5. Перепишите неравенство в виде

$$(x - \sin(x + y))^2 + \cos^2(x + y) \leqslant 0.$$

4.41. Докажите более сильное неравенство

$$|\sin \alpha_1| \cdot |\sin \alpha_2| + |\cos \alpha_1| \cdot |\cos \alpha_2| \leqslant 1.$$

4.42. См. задачу 1.12 (п. 1).

Глава 5

5.4. 1. Положим $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$ Тогда $f'(x_0) = 12$. Следовательно, $2,01^3 = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 8,12$.

2. $f(x) = x^3$, $x_0 = 10$, $\Delta x = -0,002$.

3. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,04$.

4. $f(x)=\frac{2}{x^3}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}002$.

5. $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/6$, $\Delta x=\pi/180$.

5.5. 4. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны между собой. Произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1. Если α, β — углы наклона двух прямых к оси абсцисс, γ — угол между этими прямыми, $\gamma\neq\pi/2$, то $\operatorname{tg}\gamma=|\operatorname{tg}(\alpha-\beta)|$.

6. Если $y=f(x)$ — данная функция, то $f(-1)=0$, $f'(-1)=4$, $f(2)=10$.

5.6. 3—4. Воспользуйтесь пунктами 1—2.

6, 8, 9, 10. См. указание к п. 4 задачи 5.5.

11. См. задачу 3.1.

5.8. 6. $y'=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}=\frac{2\cdot(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}$. Уравнение $y'=0$ корней не имеет. Выясняя знак y' на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$ $(-1;0)$, $(0;+\infty)$, находим промежутки возрастания $(-\infty;-1)$ и $(0;+\infty)$ и промежуток убывания $(-1;0)$.

5.9. Если дискриминант квадратного уравнения $y'=0$ положителен, то α и β — корни этого уравнения. В противном случае α и β выбираются произвольно.

5.10. 1. $y'=3x^2-12x$, $y'=0$ при $x=0$, $x=4$. На промежутке $[-1;0]$ y возрастает, на промежутке $[0;2]$ убывает. Поэтому наименьшим является значение этой функции при $x=-1$ или при $x=2$. Остается сравнить эти два значения.

5. Найдите сначала наименьшее значение функции $y=6x^5-15x^4-10x^3+1$ при $-1\leqslant x\leqslant 3$.

14. Рассмотрим функцию $y=x^4-5x^3-3x^2$ при $x\geqslant 1$. Эта функция убывает на промежутке $\left[1;\ \frac{15+\sqrt{321}}{8}\right)$ и возрастает на промежутке $\left(\frac{15+\sqrt{321}}{8};\ +\infty\right)$, и потому ее наименьшее значение в натуральных точках достигается в одной из точек, ближайших к $\frac{15+\sqrt{321}}{8}$, т. е. при $n=4$ или $n=5$. Сравните эти значения.

16. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3+2x+1$ при $-1\leqslant x\leqslant 0$ и проверьте, что первое не меньше -2, а второе не больше 2.

5.11. 1. Пусть A — точка с координатами $(-1;2)$. Проведем через точку A произвольную прямую с положительным угловым коэффициентом и обозначим через M точку пересечения этой прямой с осью абсцисс, а через N — точку пересечения этой прямой

с осью ординат (см. рис. 12). Задача состоит в нахождении минимума $|OM| + |ON|$. Пусть t — угловой коэффициент прямой MN. Переменная t может принимать любое положительное значение, и, задав значение t, мы однозначно определяем положение точек M и N и, следовательно, величину $f(t) = |OM| + |ON|$. Так как t — тангенс угла наклона прямой MN к оси абсцисс, то $|ON| = 2 + t, |OM| = \frac{2+t}{t}, f(t) = \frac{2+t}{t} + 2 + t = t + \frac{2}{t} + 3$. Так как $f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}$, то $f'(t) < 0$ при $0 < t < \sqrt{2}$, $f'(t) > 0$ при $t > \sqrt{2}$, так, что $f(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ — наименьшее значение суммы $|OM| + |ON|$.

4. Пусть $(x_0; y_0)$ — координаты точки A, t — абсцисса произвольной точки M графика функций $y = f(x)$, t_0 — абсцисса точки B. Тогда, если $\varphi(t) = |AM|^2 = (t - x_0)^2 + (f(t) - y_0)^2$, то $\varphi'(t_0) = 0$. Так как $\varphi'(t) = 2(t - x_0) + 2(f(t) - y_0) f'(t)$, то приходим к равенству $f'(t_0) = -\frac{t_0 - x_0}{f(t_0) - y_0}$. Заметим теперь, что $\frac{f(t_0) - y_0}{t_0 - x_0}$ — это угловой коэффициент прямой AB, и воспользуемся тем, что произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1.

6. Пусть t — абсцисса точки A. Можно считать, что $t > 0$. Так как угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке A равен $2t$, то угловой коэффициент прямой AB равен $-1/2t$. Уравнение прямой AB имеет вид: $y = -\frac{1}{2t}(x - t) + t^2$. Найдем теперь абсциссу u точки B из уравнения $-\frac{1}{2t}(u - t) + t^2 = u^2$, а затем найдем наименьшее значение функции $f(t) = (t - u)^2 + (t^2 - u^2)^2$ при $t > 0$.

9. Пусть $ABCD$ — произвольный прямоугольник, вписанный в данный сектор (рис. 13). Обозначим через x длину стороны AB,

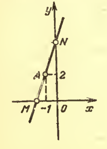


Рис. 12.

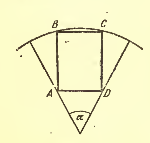


Рис. 13.

параллельной оси симметрии сектора. Переменная x может принимать любое значение из промежутка $(0; R)$, и, задав это значение, мы однозначно определяем прямоугольник $ABCD$ и его площадь $f(x)$. Выразите длину стороны BC через R, α, x, найдите функцию $f(x)$ и исследуйте ее на промежутке $(0; R)$.

5.12. 1. Так как при $x = 0$ все три функции принимают одно и то же значение, то достаточно доказать, что при $x > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} < \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$. Неравенство $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$ очевидно, а для доказательства второго неравенства заметим, что при $x = 0$ оно превращается в равенство, а при $x > 0$ справедливо неравенство $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$.

6. Докажем, что при $\alpha < x < \pi/2$ справедливо неравенство $\alpha \sin x < x \sin \alpha$. Так как при $x = \alpha$ оно превращается в равенство, то достаточно доказать, что при $\alpha < x < \pi/2$ справедливо неравенство $\alpha \cos x < \sin \alpha$, которое является следствием неравенств $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$ и $\cos x < \cos \alpha$.

5.13. 1. $y' = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$. Следовательно, y возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1; 2]$. Всю эту информацию отобразите на графике.

5.14. 3. Если $y = 12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5$, то уравнение $y' = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{8}$. Так как при $x = 0$, очевидно, $y < 0$, на промежутке $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{8}; 0\right]$ y возрастает, а на промежутке $\left[0; \frac{3+\sqrt{17}}{8}\right]$ y убывает, то уравнение не имеет корней на этих промежутках. Так как при $x = 1000$ и $x = -1000$, очевидно, $y > 0$, то уравнение имеет по одному корню на промежутках $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{8}\right]$ и $\left[\frac{3+\sqrt{17}}{8}; +\infty\right)$.

10. Если $y = 2x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + 1$, то $y' = 8x^3 + 6ax^2 - 2a^2x = 8x(x+a)(x-a/4)$. Значения y при $x = -a$, $x = 0$, $x = a/4$ равны соответственно $1 - a^4$, 1, $1 - \frac{3a^4}{128}$. Поэтому число корней зависит от знака a и от знака чисел $1 - a^4$, $1 - \frac{3a^4}{128}$.

5.16. $y' = 3x^2 - a$. Если $a \leqslant 0$, то $y' \geqslant 0$ при всех x, так что наименьшее значение y на отрезке $[0; 1]$ равно 0, а наибольшее значение равно $1 - a$ и $1 - a = 2$ при $a = -1$. Пусть $a > 0$. Тогда y

убывает на отрезке $\left[0; \sqrt{\frac{a}{3}}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[\sqrt{\frac{a}{3}}; +\infty\right)$. Если $\sqrt{\frac{a}{3}} \geqslant 1$, т. е. $a \geqslant 3$, то y принимает на отрезке [0; 1] свое наибольшее значение при $x = 0$, а наименьшее — при $x = 1$. Решая уравнение $0 - (1 - a) = 2$, находим $a = 3$. Если $\sqrt{\frac{a}{3}} < 1$, т. е. $a < 3$, то наименьшее значение y на отрезке [0; 1] равно $\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$, а наибольшим значением является большее из чисел 0, $1 - a$, т. е. 0 при $1 \leqslant a \leqslant 3$, $1 - a$ при $0 < a < 1$. Остается решить уравнение $1 - a + \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} = 2$ на промежутке (0; 1). Последнее уравнение корней не имеет, так как $1 - a < 1$ и $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} < 1$ при $0 < a < 1$.

5.17. $y' = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$. Если $a \geqslant 0$, то $-\frac{2a}{3} \leqslant 0$, и на отрезках [0; 1], [1; 3] функция y строго возрастает, так что эти значения a не удовлетворяют условию задачи. Если $a < 0$, то рассмотрите случаи $0 < -\frac{2a}{3} < 1$, $-\frac{2a}{3} \geqslant 1$.

5.18. Положив $t = \sin x$, решите ту же задачу для функции $y = t(2t^2 + a - 1)$, определенной на отрезке $[-1; 1]$.

Глава 6

6.1. 7. Представьте подынтегральную функцию в виде $2x^{-2} + 3x^{-4} - 2x^{-5}$.

9. $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$. 10. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$.

12. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

13. $$\int_{-1}^{1} (|2x - 1| - |x|)^2\,dx = \int_{-1}^{0} (1 - x)^2\,dx + \int_{0}^{1/2} (1 - 3x)^2\,dx + \int_{1/2}^{1} (x - 1)^2\,dx.$$

6.2. 4. Преобразуйте произведение $\sin 2x \cos 5x$ в сумму.

5. $\cos^3 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x) =$

$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

6. $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. 7. $x^2+4=4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)$.

9. $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$.

12. $\sqrt{1+\sin x}=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$.

6.3. 1. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{-a}^{0} f(-x)\,dx +$

$$+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

3. $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{b+T} f(x)\,dx + \int\limits_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_{b}^{b+T} f(x)\,dx.$$

6.4. 1. Если положить $t=\varphi(x)=x^3+1$, то $\varphi'(x)=3x^2$, так что данный интеграл равен $\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}\sqrt{t}\,dt$.

2. $t=x^3$, $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$. 3. $t=x\sqrt{x}$, $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

4. $t=\cos x$, $f(t)=\frac{1}{t^3}$. 5. $t=\operatorname{arctg} x$, $f(t)=t^2$.

6. $\operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^2 x\left(-1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) = 1-\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

6.5. 5. Найдите наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на отрезке [1,5; 3,5].

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на каждом из отрезков [1,5; 2], [2; 3], [3; 3,5] и представьте данный интеграл в виде

$$\int\limits_{1,5}^{2}\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int\limits_{2}^{3}\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int\limits_{3}^{3,5}\frac{x^2}{x-1}\,dx.$$

6.6. Проинтегрируйте данную функцию на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

6.7. 2. $F(x) = \int\limits_0^{x+1} \frac{t}{1+\sin^2 t}\,dt - \int\limits_0^{x} \frac{t}{1+\sin^2 t}\,dt$. Если $\varphi(t) = \frac{t}{1+\sin^2 t}$, то $F'(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$.

3. Если $\varphi(t) = \sqrt[3]{1+t^4}$, то $F'(x) = \varphi(x^2+1)2x$.

6.8. 5. Искомая площадь равна $\int\limits_0^{\pi/2} \sin y\,dy$.

9. Искомая площадь равна $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) dx + \frac{1}{2}$. Ее можно также представить в виде $\int\limits_1^2 \left(y - \frac{1}{y^2}\right) dy$.

10. Искомая площадь равна $2\int\limits_1^2 ((1+2x-x^2)-(x-1))\,dx$.

12. Найдите уравнения касательных.

13. Достаточно провести доказательство для параболы $y = x^2$ (см. задачу 3.1).

6.9. 1. См. рис. 14. Пусть t — абсцисса точки параболы, $t > 0$. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к параболе, задается уравнением $y = -\frac{x}{2t} + t^2 + \frac{1}{2}$ (см. решение задачи 5.11. 6). Абсциссы точек пересечения этой прямой с параболой $y = x^2$ — это корни уравнения $x^2 + \frac{x}{2t} - \left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = 0$. Так как одна из этих абсцисс равна t, то другую можно найти из теоремы Виета; она равна $-t - \frac{1}{2t}$. Таким образом, требуется найти наименьшее значение функции $S(t) = \int\limits_\alpha^\beta ((\alpha+\beta)x - \alpha\beta - x^2)\,dx$, где $\alpha = -t - \frac{1}{2t}$, $\beta = t$. Вычислим интеграл:

$$S(t) = \frac{(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)}{2} - \alpha\beta(\beta-\alpha) - \frac{\beta^3-\alpha^3}{3} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{1}{6}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3.$$

Следовательно, $S'(t) = \frac{1}{2}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^2\left(2 - \frac{1}{2t^2}\right)$. Так как $t > 0$, то $S'(t) = 0$ при $t = 1/2$. Легко видеть, что $S(1/2)$ — искомое наименьшее значение площади.

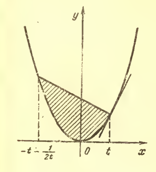


Рис. 14.

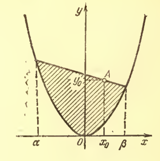


Рис. 15.

3. См. рис. 15. Пусть α, β — корни квадратного уравнения $x^2 = a(x - x_0) + y_0$ $(\alpha < \beta)$, D — дискриминант этого уравнения. Тогда $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = ax_0 - y_0$, $D = a^2 - 4ax_0 + 4y_0$, $\beta - \alpha = \sqrt{D}$. $S(a) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(ax - \alpha\beta - x^2)\,dx$. Вычислив интеграл, получим: $S(a) = \frac{1}{6}D\sqrt{D}$. Площадь $S(a)$ принимает наименьшее значение в той же точке, что и функция $f(a) = D^3 = (a^2 - 4ax_0 + 4y_0)^3$. Так как $f'(a) = 3D^2 \cdot (2a - 4x_0)$ и $D > 0$, то $f'(a) = 0$ при $a_0 = 2x_0$, откуда следует, что при $a = a_0$ справедливо равенство $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, равносильное утверждению задачи.

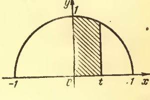


Рис. 16.

6.10.2. Если $y = f(x)$ — первообразная функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, то $f(t)$ (при $t > 0$) — площадь фигуры, заштрихованной на рис. 16.

3. $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy$ (см. рис. 17).

5. См. рис. 18.

6. Примените предыдущее неравенство к функции $f(x) = x^{p-1}$.

6.11. 1. $V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx.$ 2. $V = \pi \int_{0}^{1} (1 - y)\, dy.$

3. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку x на этой оси $(-3 \leqslant 0 \leqslant 2)$,—

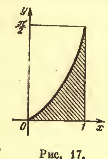


Рис. 17.

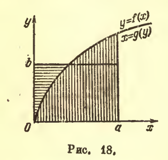


Рис. 18.

кольцо с внешним радиусом 10 и внутренним радиусом $10 - (6 - x - x^2)$, так что $V = \pi\left(500 - \int_{-3}^{2} (4 + x + x^2)^2\, dx\right)$.

4. $V = \pi \int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx.$

5. $V = \pi \int_{-r}^{r} ((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2)\, dx.$

6.12. 1. Сечение данного тела в точке y оси ординат плоскостью, перпендикулярной оси ординат,— квадрат с диагональю $2\sqrt{y}$, $V = \int_{0}^{1} 2y\, dy.$

2. Сечение данного тела в точке x оси абсцисс, перпендикулярное оси абсцисс,— круг радиуса $\sqrt{1 - x^2}$, $V = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (см. задачу 6.10).

4. Примите точку пересечения прямых l_1 и l_2 за начальную точку оси l, перпендикулярной этим прямым. Сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси l и проходящей через точку x

этой оси,— квадрат, сторона которого равна хорде круга радиуса R, отстоящей на расстояние $|x|$ от центра круга.

5. Примите центр нижнего основания цилиндра за начальную точку оси l, лежащей в плоскости нижнего основания и перпендикулярной диаметру AB (см. рис. 19). Сечение заштрихованного на рисунке тела плоскостью, перпендикулярной этой оси,— прямоугольник. Если его нижнее основание находится на расстоянии x от диаметра AB, то площадь прямоугольника $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{R^2} \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}R^3$$

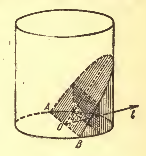


Рис. 19.

(здесь $t = R^2 - x^2$, см. задачу 6.4).

6. См. рис. 20. Общую точку нижних оснований примите за начальную точку оси, направленной по общей касательной нижних оснований. Тогда $S(x)$ — площадь равнобедренного треугольника, полученного при пересечении двух одинаковых параллелограммов (см. рис. 21), общее основание которых имеет длину $2\sqrt{R^2 - x^2}$, высота равна h, тангенс острого угла равен h/R.

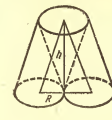
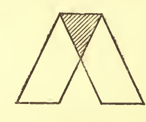


Рис. 20.


Рис. 21.

6.13. 1. Абсцисса точки в момент времени t_0 равна $-1 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{t_0} v(t)\,dt$. В задачах 2—9 искомая величина выражается интегралом от некоторой функции, первообразную которой нужно найти. Покажем, как это делается на примере задачи 3. Пусть точка с массой m — начальная точка некоторой оси, стержень лежит на этой оси и концы его имеют координаты c и $c + l$. Для произвольного $x \in [c; c + l]$ обозначим через $F(x)$ величину силы гравитацион-

ного взаимодействия между точечной массой m и отрезком $[c;\ x]$ стержня. Тогда $F(x+h) - F(x)$ — сила гравитационного взаимодействия между массой m и отрезком $[x;\ x+h]$. Так как масса этого отрезка равна Ml/h и любая его точка отстоит от массы m на расстоянии, заключенном между x и $x+h$, то имеют место неравенства: $F_1 \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant F_2$, где F_1 — величина силы взаимодействия точечных масс m и Ml/h, расстояние между которыми равно $x+h$, а F_2 — величина силы взаимодействия тех же масс, расположенных на расстоянии x, так что $F_1 = \gamma \frac{mMh}{l(x+h)^2}$, $F_2 = \gamma \frac{mMh}{lx^2}$ (коэффициент γ зависит от выбора системы единиц). Деля все члены получающихся неравенств на h и переходя к пределу при $h \to 0$, получим: $F'(x) = \frac{\gamma mM}{lx^2}$, откуда искомая сила равна $\int\limits_c^{c+l} \frac{\gamma mM}{cx^2}\,dx$.

Глава 7

7.1. 2. $\log_{\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^2 = 6$.

13. Перейдите во всех логарифмах к основанию 2 и сведите $\log_2 18$, $\log_2 36$, $\log_2 72$ к $\log_2 9$.

14. $3^{\log_5 7} = 3^{\frac{\log_3 7}{\log_3 5}} = 7^{\frac{1}{\log_3 5}} = 7^{\log_5 3}$.

15. Воспользуйтесь равенствами $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6} + 5$, $(\sqrt{6} + 1)^2 = 2\sqrt{6} + 7$.

7.2. 1. Оба логарифма сводятся к $\log_2 3$.

2. Все три логарифма выражаются через $\log_2 3$ и $\log_2 5$.

7.3. 7. $\log_9 80 < 2$, $\log_7 50 > 2$.

8. Сравните $3 \log_{12} 5$ и $3 \log_{18} 7$.

9. См. неравенство 1 задачи 3.25.

10. $\sqrt{\log_{100} 99 \cdot \log_{100} 101} < \frac{1}{2} (\log_{100} 99 + \log_{100} 101) < 1$.

11. Сравните $\log_3 5$ с корнями уравнения $x^2 - x = 1$.

12. Воспользуйтесь пунктом 11 задачи 7.1.

7.4. 5. $3^x \cdot 7^{2-x^2} = 21 \Leftrightarrow ax + 2 - x^2 = 1 + a$, где $a = \log_7 3$. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - ax + (a - 1) = 0$ равен $(a - 2)^2$.

7.5. 7. Полагая $y = (3 - 2\sqrt{2})^x$, приходим к уравнению $y + \frac{1}{y} = 34$, корнями которого являются числа $17 - 12\sqrt{2}$ и $17 +$

$+ 12\sqrt{2}$. Остается заметить, что $(3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $(3 - 2\sqrt{2})^{-2} = 17 + 12\sqrt{2}$.

8 — 12. Каждое из этих уравнений станет однородным (см. задачу 3.28), если в качестве u, v взять некоторые показательные функции.

7.6. 5. $\log_{6-x} x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (6-x)^2 \\ x > 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,$

7.7. Во всех уравнениях следует сделать замену переменной

1. $y = \lg x$. 2. $y = \log_2 x$.

3. $y = \log_x 3$. 4. $y = \log_2 (2^x + 3)$.

5. $y = \log_3 x$ (предварительно прологарифмируйте уравнение по основанию 3).

6. $u = 2^{\lg x}$, $v = 5^{\lg x}$ — уравнение становится однородным (см. задачу 3.28).

7.8. Во всех уравнениях следует привести логарифмы к одному основанию.

7.9. 1. Левая часть уравнения строго возрастает, а правая — постоянна.

2. Разделите обе части уравнения на 7^x.

4. Прологарифмируйте уравнения по основанию 3 и рассмотрите его при $x > 1$ и при $0 < x \leqslant 1$.

6. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 2^{x^2-4}(2^{x+2} - 1)$. Эта функция строго возрастает при $x \geqslant 0$, отрицательна при $x < -2$ и ограничена сверху числом, меньшим, чем 992, при $-2 \leqslant x < 0$.

9. Левая часть уравнения строго возрастает, а правая — строго убывает.

7.10. При решении показательных и логарифмических неравенств используются те же приемы, что и при решении уравнений. Следует лишь иметь в виду, что при логарифмировании или потенцировании неравенств по основанию, меньшему 1, знак неравенства меняется на противоположный.

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} < 9 \Leftrightarrow 3 - x > -2.$

5. $\log_3 (x - 1) > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 2.$

6. $\log_{\frac{1}{3}} (1 - 2x) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < 3 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}.$

9. $2^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+3}{x-2}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+3}{x-2} > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-2} < 9, \\ \frac{2x+3}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty).$

Если потенцирование или логарифмирование проводится по переменному основанию, следует разбить решение на два случая, в одном из которых основание больше 1, а в другом — меньше 1.

10. $\log_{3-x} x \leqslant -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2, \\ 2 < x < 3, \end{array}\right. \\ \log_{3-x} x \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_{3-x} x \leqslant -1, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2 < x < 3, \\ \log_{3-x} x \leqslant -1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \leqslant \dfrac{1}{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x^2 - 3x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x \geqslant \dfrac{1}{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^2 - 3x + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Осталось объединить решения систем (1) и (2).

7.11. 1. Из первого уравнения $\frac{1}{x} = y - 2$. Прологарифмируйте второе уравнение.

2. Прологарифмируйте первое уравнение.

3. Введите новые переменные $z = \log_2 x$, $t = \log_3 (y - 1)$.

4. Введите новые переменные $z = \log_6 x$, $t = y$.

5. Докажите, что $x^{\log_6 y} = y^{\log_6 x}$.

7.12. 2. См. рис. 22.

3. Примените предыдущие неравенства к $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{n}$.

4. См. рис. 23.

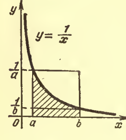


Рис. 22.

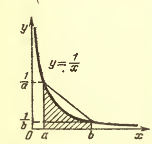


Рис. 23.

5. $\ln n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n}{n-1}$.

Примените к каждому слагаемому неравенства п. 2.

6. Используйте неравенство п. 4.

7, 8. Используйте неравенства п. 3.

7.13. См. задачу 5.2.

7.14. 2. $y = e^{\sin x \ln x}$, $y' = e^{\sin x \ln x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) =$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

7.16. См. задачу 5.14.

4. Покажите, что при $a > 1$ из неравенства $\log_a x > x$ следует неравенство $a^x < x$, а из неравенства $\log_a x < x$ следует неравенство $a^x > x$, и потому данное уравнение равносильно уравнению $\log_a x = x$. Пусть $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x - a^x$. Тогда $f'(x) = = \frac{a^{-x} - x \ln^2 a}{x a^{-x} \ln a}$, так что знак функции $f'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x) = a^{-x} - x \ln^2 a$. Покажите, что $g'(x) = 0$ при $x = x_0 = -\log_a\left(\ln \frac{1}{a}\right)$, и выведите отсюда, что при $a \geqslant 1/e$ уравнение $\log_a x = a^x$ имеет один корень. Покажите, что неравенство $g(x_0) \geqslant 0$ равносильно неравенству $a \geqslant 1/e^e$. Если $a < 1/e^e$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет два корня α и β ($\alpha < \beta$). Тогда $f(x)$ убывает при $x \in (0; \alpha]$, возрастает при $x \in [\alpha; \beta]$ и убывает при $x \in [\beta; +\infty)$. Так как при достаточно малых x выполняется неравенство $f(x) > 0$, а при достаточно больших x — неравенство $f(x) < 0$, то из неравенств $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ будет следовать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Чтобы установить эти неравенства, проверьте, что если x_1 — корень уравнения $\log_a x = = x$, то $f(x_1) = 0$, а $g(x_1) > 0$, так что $x \in (\alpha; \beta)$.

7.17. 1, 2, 4, 5. См. задачу 5.12.

3. Положите $x = 1$ в неравенстве п. 2 и подберите такое n, для которого $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}02$.

6. Исследуйте функцию $y = \frac{\ln x}{x}$.

7. Исследуйте функцию $y = \log_{a+x}(b + x)$.

8. Исследуйте функцию $y = e \ln x - x$.

7.18. 1. Умножьте неравенства на $n!$

7.19. 4. Примените неравенство п. 2 к $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$.

5. Примените неравенство п. 2 к $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}}$.

7.20. 1. Функция, удовлетворяющая уравнению $f'(x) = x_2$, имеет вид $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Найдите C из условия $f(2) = 1$.

5. Искомая функция задается равенством $f(x) = \ln x + C_1$ при $x > 0$ и равенством $f(x) = \ln(-x) + C_2$ при $x < 0$. Найдите C_1 и C_2 из условий $f(e^2) = 1$, $f(-e^3) = 2$.

7.21. 1. $f(x) = Ce^{2x}$. Найдите C из условия $f(1) = 2$.

7.22. 2. Пусть $f(x)$ — число бактерий через x секунд. Тогда $f'(x) = kx$, $f(x) = Ce^{kx}$. Коэффициенты C и k определяются из условий $f(0) = N_0$, $f(1) = N_1$. Остается решить уравнение $Ce^{kx} = 10 N_0$.

Глава 8

8.1. 3. Если $n = 1$, то $2^{2n-1} + 3n + 4 = 9$ делится на 9. Пусть $2^{2k-1} + 3k + 4$ делится на 9. Нужно доказать, что $2^{2k+1} + 3(k+1) + 4$ делится на 9. Для этого достаточно показать, что $2^{2k+1} + 3(k+1) + 4 - 4(2^{2k-1} + 3k + 4)$ делится на 9.

8.2. 2. При $n = 1$ получаем верное равенство $a_1 = a_2$. Пусть $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} = a_{2k}$. Тогда $a_{2k+2} = a_{2k+1} + a_{2k} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k+1}$, что и требовалось доказать.

7. Если $n = 1$, то $a_{5n} = a_5 = 5$. Пусть a_{5k} делится на 5. Тогда $a_{5k+5} = a_{5k+4} + a_{5k+3} = a_{5k+3} + 2a_{5k+2} + a_{5k+1} = a_{5k+2} + 4_{5k+1} + 2a_{5k} = 5a_{5k+1} + 3a_{5k}$ делится на 5.

8.3. 5. Если a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого тождества, то $a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$, $\quad b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$.

8.4. 1. Если a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого неравенства, то

$$a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{3}{5}, \quad a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0,$$

в то время как $b_{k+1} - b_k = 0$.

8.5. 10. Пусть a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого неравенства. Тогда $a_3 = 2!4!6!$, $b_3 = (4!)^3$ и неравенство $a_3 > b_3$ равносильно верному неравенству $2!6! > (4!)^2$; $\frac{a_{k+1}}{a_k} = (2k+2)!$, $\frac{b_{k+1}}{b_k} = (k+2)!(k+2)^k$ и неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k}$ следует из неравенства $\frac{(2k+2)!}{(k+2)!} > (k+2)^k$.

11. См. п. 7 задачи 7.12.

12. См. п. 3 задачи 7.12.

13. Замените в предыдущем неравенстве n на $n!$.

8.6. 1. Замените правую часть неравенства на $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2. Докажите одновременно с предложенным равенством равенство $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$.

8.7. Воспользуйтесь тождеством

$$2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha = \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha.$$

8.8. 1 — 2. См. указание к задаче 8.7.

3. Пусть $\cos\pi x = p/q$ — несократимая дробь, x — рациональное число. Тогда для некоторого натурального n справедливо равенство $\cos\pi n x = 1$, откуда следует, что 2 делится на q.

4 — 5. Если $\sin\pi x$ или $\operatorname{tg}\pi x$ — рациональное число, то $\cos 2\pi x$ — рациональное число.

8.9. Докажите сначала, что мудрец, задумавший большее число, не сможет решить поставленную перед ним задачу раньше, чем его партнер. После этого докажем индукцией по n следующее утверждение: если n, $n+d$ — задуманные числа (d — известная мудрецам разность), то не позднее чем после n отрицательных ответов своего партнера мудрец, задумавший число n, поймет, что его партнер задумал число $n+d$. Если $n=1$, то мудрец, задумавший это число, сразу же поймет, что его партнер задумал $d+1$. Предположим, что утверждение справедливо для всех $n \leqslant k$ и докажем его для $n = k+1$. Мудрец, задумавший число $k+1$, знает, что его партнер задумал $(k+1)-d$ или $(k+1)+d$. Но если бы тот задумал число $(k+1)-d$, то, в силу индукционного предположения, не позднее чем через $k+1-d$ отрицательных ответов первого мудреца он угадал бы его число. Поскольку этого не произошло, то первому мудрецу становится ясно, что у его партнера не может быть задумано число $k+1-d$, и следовательно, задумано число $k+1+d$.

8.10. В этой задаче проводится необычная индукция. Предположив, что утверждение задачи справедливо при $n=k$ и $n=l$, докажите его для $n=kl$. После этого остается доказать утверждение для простых значений n. Оказывается, это и есть самая трудная часть задачи. Докажите индукцией по m следующее утверждение: если $1 \leqslant m \leqslant p-1$, то из m целых чисел, не делящихся на p, можно составить по крайней мере m сумм, дающих различные ненулевые остатки при делении на p (при этом разрешается брать сумму из одного слагаемого, равную этому слагаемому, из двух, трех, ..., ..., всех m слагаемых). Если теперь данные $2p-1$ целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$ занумерованы в порядке возрастания их остатков от деления на p, то рассмотрим $p-1$ чисел $a_{p+1}-a_2, a_{p+2}-a_3, \ldots$

$\ldots, a_{2p-1} - a_p$. Если какое-нибудь из этих чисел, скажем $a_{p+k} - a_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$ делится на p, то числа $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+p}$ дают одинаковые остатки при делении на p, и, следовательно, их сумма делится на p. Если же ни одно из чисел $a_{p+k} - a_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$ не делится на p, то либо $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ делится на p, либо из чисел $a_{p+k} - a_{k+1}$ можно выбрать одно или несколько, сумма которых, сложенная с $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, делится на p.

8.13. 1. $a_1 = 1020$ — первое из этих чисел, $a_n = 9990$ — последнее, $n = \frac{a_n - a_1}{30} + 1$, $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

2. Если число не делится ни на 2, ни на 3, то оно имеет вид $1 + 6d$ или $5 + 6d$.

3. $a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}$.

4. $f(x) = dx + (a_1 - d)$, где d — разность прогрессии.

6. $f(x) = \frac{d}{2} x^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) x$.

7. Если $f(x) = ax^2 + bx$, то положите $d = 2a$, $a_1 = a + b$.

10. Примените утверждение п. 9.

12. $a_n + c = q(a_{n-1} + c) \Leftrightarrow qa_{n-1} + d + c = qa_{n-1} + qc$. Это равенство выполняется, если положить $c = \frac{d}{q-1}$.

8.14. 2. Предположим, что прогрессии (a_n), (b_n), (c_n) с различными целыми, не равными единице разностями d, e, f покрывают натуральный ряд. Можно считать, что $a_1 = 1$, $b_1 = 2$. Если $a_2 = 3$, то $d = 2$, и потому $c_1 = 4$, $a_3 = 5$, $b_2 = 6$, $e = 4$, $a_4 = 7$. Число 8 не может теперь попасть ни в одну из прогрессий. Если $a_2 \neq 3$, то $c_1 = 3$. Если $a_2 = 4$, то $d = 3$, $c_2 = 5$, $f = 2$, $b_2 = 6$, $e = 4$, $a_4 = 7$. Число 8 опять не попадет ни в одну из прогрессий. Если, наконец, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$, $b_2 = 4$, то $e = 2$, $a_2 = 5$, $d = 4$, $b_3 = 6$ и уже число 7 не попадает ни в одну из прогрессий.

4. $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 3$, $c_n = 3n$, $d_n = 6n + 1$, $e_n = 12n - 1$. Проверьте, что в эти последовательности попадают все натуральные числа от 1 до 24. Это не единственный пример.

8.15. 1. Положите $b_n = 1/a_n$.

2. Положите $b_n = a_n^2$.

3. Путем догадок найдите формулу общего члена и докажите ее по индукции.

8.16. 1. Пусть числа c_1 и c_2 таковы, что $a_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$, $a_2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$. Докажите по индукции, что $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$.

8. Положите $b_n = \log_2 a_n$.

9. Положите $b_n = \frac{1}{a_n}$.

8.18. 3. $\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{10} 2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^{k-1}} =$

$$= 20 - \left(2 - \frac{1}{2^9}\right) = 18 + \frac{1}{2^9}.$$

6. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k.$

8.19. 3. $a_k = \frac{k(k+1)}{2}.$

8.20. 4. $\frac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)} = \frac{(2k+1)+2k}{k(k+1)(4k^2-1)} =$

$$= \frac{1}{k(k+1)(2k-1)} + \frac{2}{(k+1)(4k^2-1)} =$$

$$= \frac{(k+1)-k}{k(k+1)(2k-1)} + \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(k+1)(4k^2-1)} = \frac{1}{k(2k-1)} -$$

$$- \frac{1}{(k+1)(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k-1)} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k(2k-1)} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(2k-1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{n(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}.$$

6. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)k! - \sum_{k=1}^{n} k!.$

8.21. См. п. 1. 3. См. п. 1 задачи 8.20.

4. См. п. 11 задачи 4.21.

Глава 9

9.5. 4. Считая все три прямых числовыми осями, разобьем их на промежутки вида $[k; k+1)$, где k — целое число. Установим взаимно однозначное соответствие между промежутками $[2k; 2k+1)$ прямой X и промежутками $[k; k+1)$ одной из двух параллельных прямых, а также между промежутками $[2k-1; 2k)$ прямой X и промежутками $[k; k+1)$ второй из параллельных прямых.

5. Считая все три прямые числовыми осями с общим началом, разбейте их на промежутки $(k, k+1]$, где k — целое неотрицательное число и $[k, k+1)$, где k — целое отрицательное число.

6. Можно считать, что $a = 0$, $b = 1$. Разбейте отрезок $[0; 1]$ на промежутки $[0; 1/2)$, $[1/2, 1/3)$, $[1/3, 1/4)$, ... и точку 1, а промежуток $[0; 1)$ — на промежутки $(0; 1/2]$, $(1/2; 1/3]$, $(1/3; 1/4]$, ... и точку 0.

8. См. рис. 24.

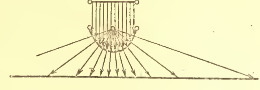


Рис. 24.

9.6. 5. Представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби и обозначим через A_n множество всех дробей p/q, у которых $|p| + |q| = n$. Тогда $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — конечные множества, объединение которых равно Q. Нумеруя последовательно элементы этих множеств, получим нумерацию Q.

9. Пусть $A \cap B = \phi$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — счетное подмножество множества A. Установим взаимно однозначное соответствие между $A \cup B$ и A следующим образом: $b_n \mapsto c_{2n}$, $c_n \mapsto c_{2n-1}$ и $a \mapsto a$, если $a \in A \setminus C$. Сведите случай $A \cap B \neq \phi$ к разобранному.

10. Покажите, что множество таких уравнений счетно и воспользуйтесь тем, что каждое уравнение имеет конечное число корней.

11. Поставьте в соответствие каждому кругу какую-нибудь содержащуюся в нем рациональную точку, т. е. точку с рациональными координатами.

12. Поставьте в соответствие каждой «восьмерке» пару рациональных точек.

9.7. 4. Воспользуйтесь п. 3 задачи 9.7 и п. 9 задачи 9.5.

5. В силу п. 3 можно считать, что объединение данных множеств — квадрат $ABCD$. Воспользуйтесь тем, что либо одно из данных множеств содержит пересечение квадрата $ABCD$ с некоторой прямой, параллельной прямой AB, либо проекция другого множества на сторону AD совпадает с этой стороной.

9.9. В каждом примере требуется либо указать искомую функцию, либо найти два решения с одинаковыми значениями y.

9.11. Постройте график функции f. Чтобы найти множество $f(A)$, изобразите множество A на оси абсцисс, восставьте перпен-

дикуляр к оси абсцисс из каждой точки множества A и спроектируйте точки пересечения этих перпендикуляров с графиком на ось ординат. Чтобы найти множество $f^{-1}(B)$, изобразите множество B на оси ординат, восставьте перпендикуляр к оси ординат из каждой точки множества B и спроектируйте точки пересечения этих перпендикуляров с графиком на ось абсцисс.

9.12. 1. См. рис. 25.

3. См. рис. 26.

9.13. 3. Функция Дирихле, задаваемая условием $f(x) = 1$, если x — рациональное число, и $f(x) = 0$, если x — иррациональное число.

5. Покажите, что коэффициенты a и b можно подобрать так, что число α будет периодом функции $g(x) = f(x) - ax - b$.

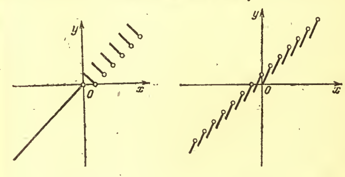


Рис. 25. Рис. 26.

9.14. 7. Пусть $x = a$ — ось симметрии графика функции f. Выберем число c так, чтобы центр симметрии графика функции $g(x) = f(x) + c$ оказался на оси абсцисс в некоторой точке b. Тогда для любого числа t справедливы равенства $g(t) = g(2a - t)$, $g(2a - t) = -g(t + 2b - 2a)$, откуда $g(t + 4b - 4a) = g(t)$, т. е. $4b - 4a$ — период функции g и, следовательно, функции f. Покажите, что при $b = a$ функция f постоянна.

8. См. п. 5 задачи 9.13.

9. Пусть g — четная функция, h — нечетная функция. Тогда $f = g + h \Leftrightarrow f(x) = g(x) + h(x)$ и $f(-x) = g(x) - h(x)$ при всех x, откуда $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

10. Искомые функции g и h будем подбирать так, чтобы график g был симметричен относительно начала координат, а график h — относительно точки (1; 0). Заметим, что, задав в точке x одно из значений $g(x)$, $h(x)$, мы однозначно определяем другое. Зададим

функцию g на отрезке $[0; 1]$ так, чтобы выполнялись равенства $g(0) = 0$, $g(1) = f(1)$, так что $h(1) = 0$. Этим мы однозначно определили функцию g на отрезке $[-1; 0]$ и, следовательно, функции g и h на отрезке $[-1; 1]$. Но тогда h и g однозначно определены на $[1; 3]$, g и h однозначно определены на $[-3; -1]$, h и g однозначно определены на $[3; 5]$ и т. д.

9.15. Чтобы найти обратную функцию φ, решите уравнение $f(a) = b$ относительно a.

1. $2a + 3 = b \Leftrightarrow a = \dfrac{b-3}{2}$. Следовательно, $\varphi(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

5. $-a^2 = b$ $(a \leqslant 0) \Leftrightarrow a = -\sqrt{-b}$, так что $\varphi(x) = -\sqrt{-x}$.

9.16. 4. Если функция φ обратна f, то

$$g(f(x)) = h(x) \Leftrightarrow g(f(\varphi(x))) = h(\varphi(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(\varphi(x)).$$

5. $f(x) = \ln x$, если $x > 0$. При $x \leqslant 0$ функцию f можно определить произвольно.

6. $g(x) = h(\sqrt{|x|})$.

7. Если $|x| \leqslant 1$, то $g(x) = h(\arccos x)$. При $|x| > 1$ функцию g можно определить произвольно.

8. Если g — такая функция, то $g(\sin(\pi - x)) = \cos(\pi - x)$ при всех x.

9.18. 1. $f(x) = x$, если x — рациональное число, и $f(x) = -x$, если x — иррациональное число.

2. Между двумя рациональными числами бесконечно много рациональных чисел, в то время как между двумя целыми числами конечное число целых чисел.

9.19. 1. Подставьте в данное равенство значение x, найденное из уравнения $\dfrac{x}{x+1} = t$.

2. Замените в данном равенстве x на $1/x$.

3. Получите еще два равенства, заменив x на $\dfrac{x+1}{1-3x}$ и на $\dfrac{x-1}{3x+1}$.

9.20. 5. Если $f(1) = 0$, то $f(x) = 0$ при всех x в силу п.п. 2 — 4 и монотонности. Пусть $f(1) \neq 0$, и для какого-нибудь x числа $f(x)$ и $xf(1)$ различны. Пусть рациональное число r заключено между $\dfrac{f(x)}{f(1)}$ и x. Тогда число $f(r) = rf(1)$ заключено между числами $f(x)$ и $xf(1)$. Покажите, что каждое из предположений $r < x$, $r > x$ приводит к противоречию с монотонностью функции f.

9.21. 1. Если $x \geqslant 0$, то $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$.

3. См. задачу 9.20.

9.22. 6. Примените к функции $g(x) = \ln f(x)$ задачу 9.20.

9.23. 4. $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{2/5}\varepsilon$. Поэтому можно взять $N = [\log_{2/5}\varepsilon] + 1$ (при $\varepsilon < 1$). Если $\varepsilon \geqslant 1$, то $N = 1$.

6. $\left|\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n < \varepsilon \Leftrightarrow \operatorname{arctg} n > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. При $\varepsilon < \pi$ последнее неравенство следует из неравенства $n > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Если $\varepsilon > \pi$, то неравенство выполнено при всех n.

9. $N = 7$.

9.28. 3. $x_n = \dfrac{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{5}{n^2} - \frac{1}{n} - 1}$. 10. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{3 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}}$.

11. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

13. $x_n = (\sqrt{n^2+1} - n) - (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$.

9.29. 2. $x_n = \pi - \dfrac{\{\pi n\}}{n}$. 4. $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$.

9.30. 4. $\dfrac{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k}{5^{k+2}} = \dfrac{1}{10}\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k+1} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{k+1}\right)$.

9.31. 2. $\dfrac{2n+1}{(n+1)^2} < x_n < \dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

9.32. 1. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^p}{an^p} = \dfrac{1}{a}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{a} < 1$.

9.34. 2. Если $x_1 > 2$, то $x_1 > x_2$ и последовательность (x_n) убывает и ограничена числами 0 и x_1. Если $x_1 \leqslant 2$, то $x_1 \leqslant x_2$ и последовательность (x_n) возрастает и ограничена числами x_1 и 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $a = \sqrt{a+2}$ и $a \geqslant 0$, откуда $a = 2$.

5. Функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ убывает на промежутке $(0; \sqrt{a}]$ и возрастает на промежутке $[\sqrt{a}; +\infty)$. Кроме того, на промежутке $(0; \sqrt{a}]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant x$, а на промежутке $[\sqrt{a}; +\infty)$ — неравенство $f(x) \leqslant x$. Поэтому, независимо от x_1, $x_2 \geqslant \sqrt{a}$ и $x_3 \leqslant x_2$, так что, начиная со второго члена, последовательность (x_n) убывает.

7. Так как $x^2 + 3x + 1 \geqslant x$ при всех x, то последовательность (x_n) возрастает. Остается выяснить, при каких значениях x_1 эта последовательность ограничена. Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $a = a^2 +$

$+ 3a + 1$, откуда $a = -1$. Поэтому, если последовательность (x_n) ограничена, то при всех n выполняется неравенство $x_n \leqslant -1$. Неравенство $x^2 + 3x + 1 \leqslant -1$ выполняется при $x \in [-2; -1]$. Поэтому если $x_1 \in [-2; -1]$, то $x_n \in [-2; -1]$ при всех n, и последовательность (x_n) сходится. Если же $x_1 > -1$ или $x_1 < -2$ (тогда $x_2 > -1$), то последовательность (x_n) расходится.

9.36. 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1/2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + x_n} = \sqrt{2}/2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-1/2} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}/2$.

5. Пусть $x_n = 1/n$, $y_n = -1/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.

12. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi/2$, то последовательность $(\operatorname{tg} x_n)$ не ограничена и, следовательно, расходится.

9.37. 4. $\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+1)} = \dfrac{x+2}{2x+1}$.

7. $\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \dfrac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}$.

9.38. $f(x) = 0$ при всех x; $g(x) = 1$, если $x = 0$, и $g(x) = 0$, если $x \neq 0$.

9.39. 8. $f(x) = 0$; если $|x| > 1$; $f(x) = 1$, если $|x| < 1$; $f(1) = 1/2$; в точке $x = -1$ функция f не определена.

9. $f(x) = 0$, если $|\sin x| < 1$; $f(x) = 1$, если $\sin x = 1$; в точках $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ функция f не определена.

12. Пусть a — иррациональное число, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как есть лишь конечное число рациональных чисел, модуль знаменателя которых меньше $\dfrac{1}{\varepsilon}$, и так как никакое рациональное число не встречается в последовательности (x_n) бесконечно много раз, то, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $|f(x_n)| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

13. Пусть $a = 0, a_1 a_2 \ldots a_s$ — конечная десятичная дробь и пусть x_n — конечная десятичная дробь, получающаяся из $a - \dfrac{1}{10^s}$ приписыванием справа n девяток. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$.

9.40. 4. $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$.

5. $\dfrac{\cos x}{\sin 4x} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\dfrac{\pi}{2} - x} \cdot \dfrac{4\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(4\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)} \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right).$

9.41. 2. Область определения функции $f(x) = 2^x + 1 - \sqrt{2 - x - x^2}$ отрезок $[-2; 1]$. Предположим, что $a > -2$. Так как $f(a) > 0$, то, в силу непрерывности f, при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $f(a - \varepsilon) > 0$, что противоречит условию. Следовательно, $a = -2$. Аналогично доказывается, что $b = 1$.

9.42. 1. Пусть $f(x) = 2^{x^2 - x} - 3 \sin x$. Покажите, что $f(0) > 0$, $f(1) < 0$.

5. Пусть $a_n > 0$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$. Тогда $f(x) = x^n\left(\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{x} + a_n\right)$. Если $|x| > 1$, то $\left|\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{x}\right| < \dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|x|}$. Поэтому, если $x > \dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{a_n}$, то $f(x) > 0$, а если $x < -\dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{a_n}$, то $f(x) < 0$. Случай $a_n < 0$ сводится к разобранному случаю.

9.43. 1. Выберем систему координат так, чтобы прямая l была параллельна оси ординат и для каждого числа x обозначим через $f(x)$ площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M, абсцисса которых не меньше x. Чтобы доказать, что функция f непрерывна, рассмотрим квадрат со сторонами, параллельными осям координат, содержащий многоугольник M. Если p — сторона этого квадрата, то для любых чисел a и x справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| \leqslant p\,|x - a|$, откуда легко следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Если S — площадь многоугольника M, то существуют такие числа α и β, что $f(\alpha) = S$, $f(\beta) = 0$. Но тогда для некоторого числа γ выполняется равенство $f(\gamma) = {}^1/_2 S$.

2. Примем точку A за начало координат. Для каждого числа α обозначим через P_α точку с координатами $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а через $f(\alpha)$ — площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M лежащих на лучах AP_β, где $\beta \in [\alpha; \alpha + \pi]$. Функция f непрерывна и для любого α сумма $f(\alpha) + f(\alpha + \pi)$ равна S — площади многоугольника M. Поэтому, если $f(\alpha) < {}^1/_2 S$, то $f(\alpha + \pi) > {}^1/_2 S$, а если $f(\alpha) > {}^1/_2 S$, то $f(\alpha + \pi) < {}^1/_2 S$, и в любом случае существует число γ, для которого $f(\gamma) = {}^1/_2 S$.

3. Выберем произвольную систему координат и для каждого числа α проведем прямую $l_\alpha \parallel (OP_\alpha)$, разбивающую многоуголь-

ник M на две равновеликие фигуры, и прямую $m_\alpha \parallel (OP_{\alpha+\pi/2})$, разбивающую M на две равновеликие фигуры. Пусть A — точка пересечения l_α и m_α. Обозначим через $f(\alpha)$ площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M, лежащих на лучах с вершиной в точке A, одинаково направленных с лучами OP_β, где $\beta \in [\alpha; \alpha + \pi/2]$. Из определения прямых l_α и m_α следует, что $f(\alpha) + f(\alpha + \pi/2) = {}^1/_2 S$, где S — площадь многоугольника M, $f(\alpha + \pi/2) + f(\alpha + \pi) = {}^1/_2 S$, $f(\alpha + \pi) + f(\alpha + 3\pi/2) = {}^1/_2 S$, откуда $f(\alpha) = f(\alpha + \pi)$, $f(\alpha + \pi/2) = f(\alpha + 3\pi/2)$. Число ${}^1/_4 S$ лежит между $f(\alpha)$ и $f(\alpha + \pi/2)$, и поэтому найдется такое γ, что $f(\gamma) = {}^1/_4 S$. Прямые l_γ, m_γ — искомые.

9.44. 1. Если $f(x) > x$ при всех x, то $f(1) > 1$, а если $f(x) < x$ при всех x, то $f(0) < 0$.

2. Если $f(x) > x$ при всех x, то $f(f(x)) > f(x) > x$, а если $f(x) < x$ при всех x, то $f(f(x)) < f(x) < x$.

3. Пусть $\varepsilon \in (0; b - a)$ и функция g определена на отрезке $[a; b - \varepsilon]$ формулой $g(x) = f(x + \varepsilon) - f(x)$. Так как $g(a) \geqslant 0$, $g(b - \varepsilon) \leqslant 0$, то существует число γ, для которого $g(\gamma) = 0$.

4. Если обратимая функция f не является строго монотонной, то найдутся такие числа $a < b < c$ из области определения f, что либо $f(b) < f(a)$ и $f(b) < f(c)$, либо $f(b) > f(a)$ и $f(b) > f(c)$. Пусть, например, $f(a) < f(c) < f(b)$ и $d \in (f(c); f(b))$. Тогда существуют $\alpha \in (a; b)$ и $\beta \in (b; c)$ такие, что $f(\alpha) = f(\beta) = d$, что противоречит обратимости функции f.

5. Воспользуйтесь п.п. 3 и 4.

7. Покажите, что функция $h(x) = f(x + {}^1/_2)\, g(x) - f(x)\, g(x + {}^1/_2)$ имеет корень.

9.45. Если среди положительных периодов функции f нет наименьшего, то функция имеет бесконечно много положительных периодов, меньших 1. Так как разность периодов и число, кратное периоду функции f, также являются ее периодами (см. задачу 9.13), то для любого числа α можно найти последовательность периодов функции f, сходящуюся к α. Пусть a — точка непрерывности функции f, b — произвольное вещественное число. Пусть (T_n) — последовательность периодов функции f, сходящаяся к $a - b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n + b) = a$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(T_n + b) = f(a)$. Так как $f(T_n + b) = f(b)$, то $f(b) = f(a)$, т. е. функция f постоянна.

Глава 10

10.1. Для того чтобы доказать, что в двух множествах поровну элементов, достаточно установить между элементами этих множеств взаимно однозначное соответствие. Если удается

установить взаимно однозначное соответствие между конечным множеством X и частью множества Y (отличной от Y), то в множестве X меньше элементов, чем в множестве Y.

1. Поставьте в соответствие каждому k-элементному подмножеству A множества X множество $X \setminus A$, состоящее из $n - k$ элементов.

2. Добавляя элемент a к каждому подмножеству множества X, не содержащему a, мы получим все подмножества, содержащие a.

4. Вычитая множество A из каждого подмножества множества X, содержащего A, мы получим не все подмножества множества X, не содержащие A.

6. Если в данном множестве нечетное число элементов, утверждение очевидно. Если же в нем четное число элементов, то зафиксируйте один из них и рассмотрите подмножества с четным и с нечетным числом элементов, содержащие и не содержащие зафиксированный элемент.

10.2. Задача решается теми же приемами, что и предыдущая.

1. Каждому решению $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ первого уравнения поставьте в соответствие решение $(x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_k + 1)$ второго уравнения.

3. Каждому решению $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ первого уравнения поставьте в соответствие решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ второго уравнения, где y_i — количество чисел x_j, удовлетворяющих неравенству $x_j \geqslant n - i + 1$.

10.3. 4. Покажите, что число элементов N множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ вычисляется по формуле $N = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$ (это и есть формула включения и исключения). Если элемент x множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ принадлежит k множествам из последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и не принадлежит остальным $n - k$ множествам, то он подсчитан со знаком «$+$» в правой части формулы включения и исключения столько раз, сколько есть в множестве из k элементов подмножеств с нечетным числом элементов, а со знаком «$-$» — столько раз, сколько есть в множестве из k элементов непустых подмножеств с четным числом элементов. Остается воспользоваться п. 6 задачи 10.1.

6. Пусть для $i = 1, 2, \ldots, s$ множество A_i состоит из всех целых чисел, не превосходящих n и делящихся на p_i. Тогда $\varphi(n) = n - N$, N — число элементов множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$, которое находится с помощью формулы включения и исключения.

10.4. 1. Пусть подмножество B множества X таково, что ни B, ни $X \setminus B$ не равны ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Покажите, что одно из этих множеств — искомое.

2. Покажите, что для любых i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ множество $X \setminus (A_i \cap A_j)$ не равно ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и выведите отсюда, что множество $A_i \cap A_j$ равно одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Это верно и для множества $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

10.5. 1. Распределите числа по ящикам 0, 1, 2,. . ., 9 в соответствии с последней цифрой.

2. Распределите точки по ящикам 0, 1, 2,. . ., $n - 1$ в соответствии с числом выходящих отрезков. Покажите, что один из ящиков 0, 1, 2,. . ., $n - 1$ пуст.

3. Поместите число a в ящик номер k (где $0 \leqslant k \leqslant n$), если $a + k$ или $a - k$ делится на $2n$.

4. Представьте каждое число a в виде $2^k \cdot a_1$, где a_1 нечетно, и поместите его в ящик номер a_1.

5. Вместе с данными числами $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ рассмотрите числа $a_{n+1} - a_1, a_{n+1} - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n$.

6. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа, то распределите числа a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ по ящикам 0, 1, 2,. . ., $n - 1$ в соответствии с остатком от деления на n.

7. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все различные простые делители произведения данных чисел ($s \leqslant n$). Поставьте в соответствие каждому из данных чисел последовательность из нулей и единиц, i-й член которой равен 1, если в разложение данного числа на простые множители число p_i входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае. Воспользуйтесь тем, что число таких последовательностей равно 2^s.

8. Вот пример, показывающий, что $k = 16$, $k = 17$, $k = 18$ не удовлетворяют условию задачи: $x_i = 1$, если $i \neq 16$, $x_{16} = 19$. Значения k от 31 до 47 исключаются следующим примером: $x_i = 1$, если $i \neq 1$ и $i \neq k - 17$, $x_1 = 49 - k$, $x_{k-17} = k - 29$. Если $k \leqslant 12$, то пусть $p_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$, $q_i = p_i + k$. Тогда $p_1 < p_2 < \ldots < p_{30} = 48$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_{30} = 48 + k$. Мы получили 60 натуральных чисел, наибольшее из которых $q_{30} \leqslant 60$. Если ни одно из этих чисел не равно k, то имеется равенство вида $p_i = q_j$, откуда $p_i - p_j = k$. Пусть $19 \leqslant k \leqslant 24$ и пусть l — число чисел p_i, принадлежащих отрезку $[1; k - 1]$. Тогда в отрезке $[k + 1; 2k - 1]$ окажется l чисел q_j и, если предположить, что равенство $p_i = q_j$ ни для каких i, j не выполняется, то в этом отрезке не более чем $k - 1 - l$ чисел p_i. Следовательно, в отрезке $[2k, 48]$ должно быть по крайней мере $31 - k$ чисел p_i, что невозможно, так как $48 - 2k + 1 < 31 - k$.

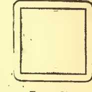
9. С каждым членом последовательности свяжем пару чисел $(x; y)$, где x — длина самой длинной возрастающей подпоследовательности, начинающейся с данного члена, а y — длина самой длин-

ной убывающей подпоследовательности, начинающейся с данного члена. Предположив, что все значения x не больше m, а все значения y не больше n, покажите, что некоторым двум членам последовательности соответствует одна и та же пара $(x; y)$. Покажите, что это невозможно.

10. Пусть a, b — два числа из одной строки новой таблицы. Пусть a левее b. Рассмотрев числа, меньшие или равные a и лежащие в одном столбце с a, и числа, большие или равные b и лежащие в одном столбце с b, покажите, что некоторые два из этих чисел находились в одной строке первоначальной таблицы.

11. Проведите индукцию по k. Если A — одна из данных точек, то покажите, что среди выходящих из нее отрезков есть больше, чем $[(k-1)!e]$, окрашенных в один цвет.

10.6. 1. Если круг радиуса r содержит точку A, то центр этого круга содержится в круге радиуса r с центром в точке A. Поэтому достаточно показать, что из 64 кругов радиуса 1/8 с центрами в отмеченных точках некоторые три имеют общую точку. Все эти круги содержатся в фигуре, состоящей из точек, удаленных не более чем на $^1/_8$ от данного квадрата (см. рис. 27). Сравните площадь этой фигуры и π — сумму площадей кругов.


Рис. 27.

3. Пусть F — данная фигура, F_1 и F_2 — фигуры, полученные из фигуры F параллельными переносами на 0,001 в направлениях, угол между которыми равен 60°. Покажите, что фигуры F и F_1, F и F_2, F_1 и F_2 не имеют общих точек и содержатся в квадрате со стороной 1,001. Получите отсюда первую оценку площади фигуры F. Пусть фигуры F_3 и F_4 получены из фигуры F параллельными переносами на $0{,}001\cdot\sqrt{3}$ в направлениях, угол между которыми равен по величине углу при вершине равнобедренного треугольника с боковой стороной $0{,}001\cdot\sqrt{3}$ и основанием 0,001. Так как фигуры F_3 и F_4 не пересекаются, то пересечение одной из них с F имеет площадь, не большую половины площади F. Пусть это фигура F_3 и пусть фигуры F_5 и F_6 получены из F параллельными переносами на 0,001 в направлениях, образующих угол в 30° с направлением переноса, переводящего F в F_3. Покажите, что общая площадь, занимаемая фигурами F, F_3, F_5, F_6 не менее, чем $\frac{7}{2}S$, где S — площадь фигуры, и получите отсюда вторую оценку площади фигуры F.

10.7. 1. Инвариантом указанных преобразований является остаток от деления числа на 9. Так как 1 000 000 дает при делении на 9 в остатке 1, то в получившемся наборе число единиц на 1 больше числа двоек.

2. Инвариантом является произведение знаков (нужно заменить плюсы на 1, а минусы — на —1).

3. Инвариантом является остаток от деления на 2 суммы всех чисел таблицы, кроме чисел, расположенных в третьей и шестой строках. Если в исходной таблице такая сумма не делится на 2, то в любой получающейся из нее таблице есть числа, не делящиеся на 2.

4. Занумеруйте секторы последовательно числами 1, 2, 3,. . . . . ., 10 и присвойте каждой фишке номер сектора, в котором она расположена. Покажите, что сумма этих номеров все время остается нечетной.

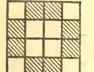


Рис. 28.

5. Инвариантом является произведение восьми знаков, расположенных в клетках, заштрихованных на рис. 28.

6. Пусть числа 1, 2,..., n выписаны в строчку в некотором порядке. Будем говорить, что числа k и l образуют беспорядок, если большее из них расположено левее меньшего. Покажите, что при перестановке соседних чисел число беспорядков меняет четность.

7. Покажите, что перестановку любых двух чисел можно заменить нечетным числом перестановок соседних чисел.

8. Занумеруйте автомобили числами 1, 2, 3,. . ., 25. Чтобы описать взаимное положение автомобилей после каждого обгона, будем выписывать их номера в порядке следования автомобилей, начиная всегда с автомобиля номер 1. Покажите, что при любом обгоне изменится четность числа беспорядков в последовательности номеров.

9. Проверьте, что число беспорядков в перестановке $n, n-1, \ldots$ . . ., 3, 2, 1 равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Покажите, что при указанных преобразованиях четность числа беспорядков меняется. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — четное число, то разбейте данные n чисел на пары соседних чисел (оставляя при нечетном n среднее число без пары), а затем образуйте четверки из первой и последней пары, второй и предпоследней и т. д.

10.8. 1. Покажите, что при переходе от каждого множества к следующему уменьшается разность между наибольшим и наименьшим элементом множества.

2. Покажите, что в каждом столбце получившейся таблицы все числа, начиная со второго, образуют возрастающую ограниченную последовательность натуральных чисел.

3. Если в первом столбце есть числа, равные 1, то удвоим строки, содержащие эти числа, а затем вычтем 1 из всех чисел первого столбца. Покажите, что сумма чисел первого столбца будет при этом уменьшаться до тех пор, пока мы не придем к столбцу, состоящему только из единиц. Из этого столбца получаем столбец из нулей, а затем переходим ко второму столбцу и т. д.

4. Покажите, что число пар соединенных точек разного цвета уменьшается.

5. Покажите, что уменьшается сумма длин отрезков.

6. Будем менять знаки только в строках и столбцах с отрицательной суммой. При этом сумма всех чисел таблицы будет увеличиваться.

7. Занумеруем точки в произвольном порядке. Предположим, что нашлись соседние точки, расстояние между которыми больше 1. Пусть, например, $|A_1A_2| > 1$. Покажите, что найдется такое k, что $|A_1A_k| \leqslant 1$ и $|A_kA_{k+1}| \leqslant 1$. Поменяйте номерами точки A_2 и A_k, A_3 и A_{k+1} и т. д. Покажите, что число пар соседних точек, расстояние между которыми больше 1, при этом преобразовании уменьшается.

10.9. 1. Построение любого слога разбиваем на два шага: выбор согласной, выбор гласной.

3, 4. Построение произвольного двузначного числа разбиваем на два шага: выбор первой цифры, выбор второй цифры.

8. Построение произвольного делителя числа n, имеющего вид $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d$, где a, b, c, d — целые числа, $0 \leqslant a \leqslant 7$, $0 \leqslant b \leqslant 10$, $0 \leqslant c \leqslant 15$, $0 \leqslant d \leqslant 9$, разбиваем на четыре шага: выбор a, выбор b, выбор c, выбор d.

9. На каждом шаге строим очередное звено ломаной. При этом у нас 4 возможности на первом шаге и не более трех — на каждом следующем шаге, откуда $L \leqslant 4 \cdot 3^{n-1}$. Неравенство $L_n \geqslant 4 \cdot 2^{n-1}$ получится, если ограничиться ломаными, у которых каждая вершина, начиная со второй, дальше от начала координат, чем предыдущая.

14. Построение числа разбивается на четыре шага: выбор первой цифры, второй, третьей, четвертой.

15. Построение числа разбивается на шесть шагов: выбор второй цифры, четвертой, первой, третьей, пятой, шестой.

16. Построение числа разбивается на четыре шага: выбор места для двойки, тройки, четверки, пятерки.

10.10. 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — элементы данного множества. Разбейте построение произвольного подмножества на m шагов, решая на i-м шаге, включать ли элемент x_i в это подмножество.

3. Выбрать такое число — значит, выбрать места для нулей.

10.11. 4. Построение такой перестановки разбивается на два шага: выбор места для нуля (после чего положение единицы определено однозначно), выбор перестановки цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. Построение такой перестановки разбивается на три шага: выбор месте для единицы, выбор места для нуля, выбор перестановки остальных цифр.

8. Построение произвольной расстановки разбивается на четыре шага: выбор перестановки первого, второго, третьего собрания сочинений, выбор перестановки тройки собраний сочинений.

10. На первом шаге 15 мальчиков рассаживаются по одному за каждой партой с левой стороны, на втором шаге рассаживаются 15 девочек, на третьем шаге выбирается множество парт, на которых мальчик и девочка меняются местами.

11. Таких перестановок столько же, сколько и тех, в которых нуль расположен правее единицы.

13. Цифры 0, 1, 2, 3 могут иметь 4! разных расположений друг относительно друга. Все эти расположения одинаково часто встречаются в перестановках цифр 0, 1, 2,. . ., 9. Нас устраивают три из этих расположений: 0123, 0132, 0312.

10.12. 1. Найдите количество пятизначных чисел, в записи которых все цифры нечетны.

2. Найдите количество перестановок, в которых ни одна из первых трех цифр не равна 0, 3, 6, 9.

3. Найдите количество пятизначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр.

10.13. 1. Разбейте множество всех таких чисел на множества пяти-, четырех-, трех-, дву- и однозначных чисел.

3. Разбейте все такие числа на две части, в зависимости от того, равна ли нулю последняя цифра. Выбирайте сначала последнюю цифру, затем первую, вторую, третью, четвертую.

4. Выберем две последние цифры (25, 50 или 75), а затем разобьем все шестизначные числа на пять частей, задаваемых условиями (a_i — i-я цифра числа): среди цифр a_1, a_3, a_5 нет равных; $a_3 = a_5$, но $a_1 \neq a_5$; $a_1 = a_5$, но $a_3 \neq a_5$; $a_1 = a_3$, но $a_3 \neq a_5$; $a_1 = a_3 = a_5$. Выбираем первую цифру, затем третью, вторую, четвертую.

5. Разбейте все перестановки на две части, в зависимости от того, занимает ли нуль одно из первых четырех мест или одно из двух следующих.

6. Разбейте все перестановки на две части, в зависимости от того, располагается ли единица на краю или нет.

7. Разбейте все перестановки на две части, в зависимости от того, занимает ли нуль одно из двух средних мест или нет.

10.14. 3. Покажите, что число карточек, у которых сумма первых двух цифр и сумма двух последних цифр равны n, равно числу карточек, у которых эти суммы равны $18 - n$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k+1) = (n+1)(n+2)/2$.

5. Нужно вычислить $\sum\limits_{k=0}^{27} a_k^2$, где a_k — число карточек, у которых сумма первых трех цифр равна сумме трех последних цифр и равна k. Покажите, что $a_k = a_{27-k}$, так что достаточно вычислить a_k при $k \leqslant 13$. Если $k \leqslant 9$, то $a_k = (k+1)(k+2)/2$ (см. п. 4). При $10 \leqslant k \leqslant 13$ нужно из $(k+1)(k+2)/2$ вычесть утроенное число тех решений уравнения $x + y + z = k$, в которых $x \geqslant 10$.

10.15. 1. Разобьем все 12! перестановок 12 человек на группы, помещая две перестановки в одну группу в том и только в том случае, если в этих перестановках у любого человека одни и те же соседи. Чтобы задать произвольную перестановку из некоторой группы, нужно выбрать место для какого-нибудь человека, после чего положение остальных людей определяется однозначно. Таким образом, каждая группа состоит из 12 перестановок и число групп равно $12!/12 = 11!$

5. Если бы у нас было две разных единицы, то мы бы получили 5! разных чисел. Соединяя в одну группу два числа, получающиеся одно из другого перестановкой двух единиц, мы получим, что количество разных пятизначных чисел равно $5!/2$.

10. Отождествите распределения, получающиеся одно из другого некоторой перестановкой ящиков.

10.19. 1. На первом шаге нужно выбрать ящик, в котором окажется два шара, а затем разбить все распределения шаров по ящикам на три части, в зависимости от цвета двух шаров, попавших в один ящик.

2. Разбейте все распределения на шесть групп, определяемых условиями: есть ящик с тремя шарами одного цвета; есть ящик с тремя шарами, среди которых два одного цвета и один другого; есть два ящика с четырьмя шарами одного цвета, распределенными поровну между ними; есть два ящика с двумя шарами, среди которых три шара — одного цвета и один — другого; есть два ящика с двумя шарами, в одном — два белых шара, в другом — два черных; есть два ящика, в каждом из которых один белый и один черный шар. В каждом случае решение разбивается на три шага: выбор ящиков, содержащих более одного шара, распределение шаров по этим ящикам, распределение шаров по остальным ящикам.

10.20. 2. Поставьте в соответствие каждому решению $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ последовательность из нулей и единиц, построенную следующим образом: сначала x_1 единиц, затем 0, x_2 единиц, 0, ..., x_{m-1} единиц, 0, x_m единиц.

3. См. п. 1 задачи 10.2.

5. Введите в уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ новые переменные по формулам $y_i = x_i - 1$.

6. Введите в уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ новые переменные по формулам $y_i = 6 - x_i$.

10.21. 1. Пусть A_k — множество всех перестановок $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ чисел 1, 2, ..., n, удовлетворяющих условию $a_k \neq k$. Докажите, что пересечение i множеств A_k состоит из $(n-i)!$ перестановок, а число таких пересечений равно C_n^i. Искомое число равно $n! - N$, где N — число элементов множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

2. Разбейте построение произвольной раскраски на восемь шагов: раскраска первой, второй, ..., восьмой горизонтали. На первом шаге есть 8! возможностей, а число возможностей на каждом из следующих шагов задается формулой предыдущей задачи при $n = 8$.

3. Число всевозможных распределений m различных шаров по n различным ящикам равно n^m. Обозначим через A_k множество таких распределений, при которых k-й ящик остается пустым. Число элементов в пересечении i множеств A_k равно $(n-i)^m$, а число таких пересечений равно C^i. Искомое число равно $n^m - N$, где N — число элементов множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

4. Примените предыдущую задачу к случаю $m = n$.

10.22. 1. Обозначая искомую сумму через S_n, докажите, что $S_n = 2S_{n-1}$.

2—3. Докажите, что эта сумма равна сумме всех членов $(n-1)$-й строки.

4—5. В этих задачах удобно представить себе треугольник Паскаля как геометрическую фигуру, заменив числа T_n^k точками и расположив эти точки в соответствии с рис. 29, так что точки, соответствующие членам T_{n-1}^{k-1}, T_{n-1}^k, T_n^k, образуют правильный треугольник со стороной 1. Около каждой точки поставим число 0 или 1 в зависимости от того, четен или нечетен соответствующий член треугольника Паскаля. Пусть A — вершина треугольника Паскаля, а B и C — крайние точки строки, в которой все числа, кроме двух крайних, равны 0. Пусть D и E — крайние точки строки, номер которой вдвое больше номера строки BC, F — средняя точка этой строки (см. рис. 30). Покажите, что в треугольниках BDF

и CEF нули и единицы расположены точно так же, как в треугольнике ABC.

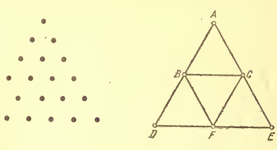


Рис. 29. Рис. 30.

10.23. 5. Воспользуйтесь тождествами $C_{n+k}^{n} = C_{n+k+1}^{n+1} - C_{n+k}^{n+1}$

6. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^{p} = \sum\limits_{k=0}^{m+n-p} C_{p+k}^{p} - \sum\limits_{k=0}^{n-1-p} C_{p+k}^{p}.$

10.24. 1. См. п. 12 задачи 10.15.

13. Общий член разложения имеет вид $\frac{6!}{l!\,m!\,n!}\,x^{l/2}x^{m/3}x^{n/4}$, где l, m, n — неотрицательные целые числа; $l+m+n=6$. Если $\frac{l}{2}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}=2$, то $n=2l$, $m=3\ (2-l)$. Следовательно, $l=0$, $m=6$, $n=0$ или $l=1$, $m=3$, $n=2$ или $l=2$, $m=0$, $n=4$. Складывая соответствующие значения $\frac{6!}{l!\,m!\cdot n!}$, получаем искомый коэффициент.

10.25. 1—4. Положите в формуле бинома $x=1$, $x=-1$, $x=-2$, $x=9$.

5—7. Дифференцируя формулу бинома, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1} = n\,(1+x)^{n-1}.$$

8—10. Интегрируя формулу бинома, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\,x^{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

11. Примените индукцию по n и воспользуйтесь тождеством 9.

15. Приравняйте коэффициенты при x^p в левой и правой частях равенства $(1+x)^m\,(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$.

Глава 11

11.1. 4. $i(i-1) = i^2 - i = -1 - i$.

9. $i^{31} = (i^2)^{15}\cdot i = -i$. 10. $(1+i)^{20} = ((1+i)^2)^{10} = -2^{10}$.

11.2. 3. $\frac{2i-3}{1+i} = \frac{(2i-3)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

11.3. 1. $(1+i)x + (2+i)y = 5+3i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2y) + (x+y)i = 5+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5, \\ x+y=3. \end{cases}$$

11.5. Так как $i^2 = -1$, то $(\varphi(i))^2 = \varphi(-1) = -1$, поэтому либо $\varphi(i) = i$ и тогда $\varphi(a+bi) = \varphi(a) + \varphi(b)\varphi(i) = a+bi$, либо $\varphi(i) = -i$ и тогда $\varphi(a+bi) = a - bi$.

11.6. 4. Обозначим данное число через ω. Тогда $\overline{\omega} = \frac{\bar{z}^2+z}{\bar{z}^3-z} + \frac{\bar{z}+z^2}{z-z^3} = \omega$.

5. Если $\omega = \frac{z-1}{i(z+1)}$, то $\overline{\omega} = \frac{\bar{z}-1}{-i(\bar{z}+1)} = \frac{\frac{1}{z}-1}{-i\left(\frac{1}{z}+1\right)} =$

$$= \frac{1-z}{-i(1+z)} = \omega.$$

11.7. 3. $(x+yi)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2y^2=4, \\ xy \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2+3, \\ y^4+3y^2-4=0, \\ xy \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4, \\ y^2=1, \\ xy \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

11.11. 1. Это тождество утверждает, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Вот комплексное доказательство тождества:

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 =$$
$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) =$$
$$= 2(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} |z-z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k) =$$

$$= nz\bar{z} + \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{z}_k - \bar{z}\sum_{k=1}^{n} z_k - z\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k = n|z|^2 + n = n(|z|^2+1).$$

4. Эти неравенства утверждают, что в треугольнике с вершинами z_1, z_2, z_3 сторона z_1z_2 меньше суммы и больше разности двух других сторон.

5. Сложите неравенства $|z - z_1| + |z - z_2| \geqslant |z_1 - z_2|$, $|z - z_2| + |z - z_3| \geqslant |z_2 - z_3|$, $|z - z_3| + |z - z_1| \geqslant |z_3 - z_1|$.

6. Положим $z_4 = -(z_1 + z_2 + z_3)$. Тогда $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, и неравенство можно переписать так: $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$, причем в этом неравенстве, несмотря на его кажущуюся несимметричность, числа z_1, z_2, z_3, z_4 можно произвольным образом переставлять (например, заменяя $|z_1 + z_2|$ на $|z_3 + z_4|$, а $|z_3 + z_1|$ на $|z_2 + z_4|$, мы получим в левой части $|z_2 + z_3| + |z_3 + z_4| + |z_4 + z_2|$). Так как $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то можно выбрать в комплексной плоскости такие точки W_1, W_2, W_3, W_4, что $W_2 - W_1 = z_1$, $W_3 - W_2 = z_2$, $W_4 - W_3 = z_3$, $W_1 - W_4 = z_4$. Покажем, что можно выбрать порядок следования чисел z_1, z_2, z_3, z_4 так, чтобы ломаная $W_1W_2W_3W_4$ оказалась самопересекающейся. Если, например, точка W_4 лежит в треугольнике $W_1W_2W_3$, то нужно числа z_1, z_2, z_3, z_4 расположить так: z_2, z_3, z_1, z_4. Если же точки W_1, W_2, W_3, W_4 образуют выпуклый четырехугольник, то, меняя местами числа z_1 и z_2, мы придем либо к самопересекающейся ломаной, либо к ломаной, одна из вершин которой лежит в треугольнике, образованном тремя другими вершинами. Итак, пусть отрезки W_1W_2 и W_3W_4 имеют общую точку W. Тогда $|W_2 - W_4| + |W_1 - W_3| \leqslant |W_2 - W_1| + |W_3 - W_4|$, т. е. $|z_2 + z_3| + |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_3|$. Остается сложить это неравенство с неравенством $|z_3 + z_1| \leqslant |z_2| + |z_4|$, следующим из равенства $|z_3 + z_1| = |z_2 + z_4|$ и неравенства треугольника.

11.13. 1. $z_1z_2 = r_1r_2((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + (\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1)i)$.

7. $$\left(\frac{1}{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}\right)^n = \left(\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^n = \frac{\cos\frac{n\alpha}{2} - i\sin\frac{n\alpha}{2}}{2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}}.$$

10. $$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20} = 2^{10}\cdot\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{20}.$$

11.14. 2. Пусть $t = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тогда $r^3 = |z| = \sqrt{2}$, $3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, откуда $r = \sqrt[6]{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$. Полагая $k = 0, 1, 2$ и вычисляя косинус и синус $\pi/12$, $3\pi/4$ и $17\pi/12$, получим три различных кубических корня из $1 + i$.

11.16. 1. $\omega^5 = \omega^3 \cdot \omega^2 = \omega^2 = \overline{\omega}$.

3. Числа $(a + b\omega + c\omega^2)^n$ и $(a + b\omega^2 + c\omega)^n$ — комплексно сопряженные.

11.17. 1. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)i$.

3. $(1 + i)^{100} = (C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \ldots + C_{100}^{100}) + (C_{100}^1 - C_{100}^3 + \ldots - C_{100}^{99})\, i$.

С другой стороны, $(1 + i)^{100} = ((1 + i)^2)^{50} = -2^{50}$.

5. Используйте разложение $(1 + \omega)^n$, где ω — невещественный кубический корень из 1 и равенство $1 + \omega = -\overline{\omega}$ (см. задачу 11.16).

6. Используйте разложение $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n$.

7. Пусть $S = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k+1)\alpha$, $T = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k+1)\alpha$, $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Тогда $S + Ti = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^{k+1} = z(1+z)^n$.

8. Так как $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, то $\cos^n\alpha = \frac{1}{2^n}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^{2k-n}$. Воспользуйтесь равенством $C_n^k z^{2k-n} + C_n^{n-k} z^{n-2k} = 2C_n^k \cos(n-2k)\alpha$.

11.20. 6. Обратите внимание на то, что $f(x) = f'(x) + \frac{x^n}{n}$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. 5. 0,28; 0(3); 0,(142857); 1,1(6); 0,7(3); 1,2(3). 1.4. 1. $\alpha+\beta=2{,}5387\ldots$; $\alpha-\beta=2{,}0635\ldots$; $\alpha\beta=0{,}5467\ldots$; $\alpha/\beta=9{,}684\ldots$ 2. $\alpha+\beta=4{,}151\ldots$; $\alpha-\beta=2{,}0959\ldots$; $\alpha\beta=3{,}2107\ldots$; $\alpha/\beta=3{,}0391\ldots$ 1.5. 1. 20 девяток. 2. 20 нулей. 3. 20 девяток. 4. 20 нулей. 1.6. 1. $\sqrt{11}$. 2. $2\sqrt{5}$. 3. $\sqrt{10}+\sqrt{21}$. 4. $\sqrt{11}$. 1.8. 1. $\sqrt{2}$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. $2-\sqrt{3}$. 4. $3+\sqrt{6}$. 5. $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$. 6. $\frac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}$. 7. $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$. 8. $\frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}}{7}$. 9. $\frac{1-\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}{8}$. 10. $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{4}$. 1.9. 1. $2+\sqrt{5}$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; $\sqrt{7}-\sqrt{5}$. 1.10. 1. $x=-1$, $x=3$. 2. $x=-1$, $x=4$. 3. решений нет. 4. $-1\leqslant x\leqslant 2$. 5. $x=2$. 6. $x\geqslant 2$. 7. $x=3$, $x=7$. 8. $1\leqslant x\leqslant 5$. 9. $x<-2$, $x>0$. 10. $-3<x\leqslant -2$, $2\leqslant x<3$. 11. $x\leqslant 3$. 12. $-4<x<2$. 13. x — любое вещественное число. 1.12. 5. 3; 13/4; 16/5; 19/6; 22/7.

Глава 2

2.1. 1. $x+y=2$. 2. $x=2$. 3. $y=2x$. 4. $5y-3x=13$. 5. $x+y=4$. 2.5. 1. $x=1$. 2. $x=-4$, $x=2/3$. 3. $x=3/2$. 4. $x\geqslant 1$. 2.6. 1. $x\leqslant 2/3$. 2. $4/3<x<8$. 3. $x<2$. 2.9. 1. Решений нет, если $a<1$; $x=a+1$, $x=3a-1$, если $a\geqslant 1$. 2. Решений нет, если $a<-3$ или $a>3$; $2a-5\leqslant x\leqslant 1$, если $2\leqslant a\leqslant 3$; $-1\leqslant x\leqslant 2a+5$, если $-3\leqslant a\leqslant -2$; $-1\leqslant x\leqslant 1$, если $-2<a<2$. 3. $-4/3<a<0$.

Глава 3

3.3. 1. $y=\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x$. 3.5. 1. $y\geqslant 0$. 2. $-1/4\leqslant y\leqslant 2$. 3. $y\geqslant -5$. 4. $y\geqslant -6$. 5. $-1<y\leqslant\frac{1}{8}$. 3.7. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 3.11. 1. Решений нет, если $a\leqslant -5/4$ или $a\geqslant 5$;

$\frac{3-\sqrt{4a+5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$, если $-5/4<a<1$; $a-1<x<\frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$, если $1\leqslant a<5$. 2. Решений нет, если $a\leqslant-\sqrt{2}/2$ или $a\geqslant\sqrt{2}/2$; $-\sqrt{1-a^2}<x<a$, $-a<x<\sqrt{1-a^2}$, если $-\sqrt{2}/2<a<0$; $-\sqrt{1-a^2}<x<-a$, $a<x<\sqrt{1-a^2}$, если $0\leqslant a<\sqrt{2}/2$. 3. Решений нет, если $a<-1/4$ или $a\geqslant 2$; $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2-a}$, если $-1/4\leqslant a\leqslant 2$. 3.13. 1. $a>9/16$. 2. $a=-1$. 3. $a<-6$, $a>2$. 3.15. 1. $-5/7$; $67/9$; $440/27$. 4. $x^2-4x+1=0$. 3.16. 1. $a<0$. 2. $0<a<\frac{1}{2}$. 3. $a\leqslant 0$. 4. $a<-3$, $a>3$. 3.17. 1. $a>-8/3$. 2. $a<-1$ или $a\geqslant 8$. 3. $a\leqslant 1/2$. 3.18. 1. $y\leqslant-2$, $y\geqslant 2$. 2. y — любое вещественное число. 3. $y\leqslant-9/2$, $y\geqslant-2$. 4. $-3/5\leqslant y\leqslant 1$. 3.19. 2. $a=5$. 3.22. $y=x^2-1/2$. 3.24. 1. $(-\infty;\ a/2]$ — промежуток возрастания, $[a/2;\ +\infty)$ — промежуток убывания. 3.25. 2. $2\sqrt{ab}$. 3.26. 1. $x=-1$, $x=\frac{38}{7}$. 2. $x=5$. 3. $x=\frac{3-5\sqrt{3}}{12}$, $x=\frac{3+5\sqrt{3}}{12}$. 4. $x=-2$. 3.27. 1. $x=-1$, $x=1$. 2. $x=-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $x=2$. 3. $x=\frac{-3\pm\sqrt{177}}{12}$, $x=-3/2$, $x=1$. 4. $x=-1\pm\sqrt{7}$, $x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$. 5. $x=-1/2$, $x=0$, $x=3$, $x=5$. 6. $x=1$, $x=3$, $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. 7. $x=7\pm\sqrt{34}$. 8. $x=1/6$, $x=1$, $x=\frac{7\pm\sqrt{601}}{12}$. 9. $x=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.
3.28. 1. $x=\pm 1$. 2. $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, $x=3$. 3. $x=4/5$, $x=3$.
3.29. 1. $x=1$, $x=\frac{-11\pm\sqrt{57}}{8}$. 2. $x=-1$, $x=-1/3$, $x=\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}$. 3. $x=-2/3$, $x=1$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$. 4. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 3.31. 2. $x=1$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. 3. $x=2$. 4. $x=1/2$. 5. $x=1/3$, $x=3/2$.
3.32. 1. $x=\frac{-3-\sqrt[3]{6}}{2}$. 2. $x=-1$, $x=-1/2$, $x=2$. 3. $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. 3.33. $x=a-1$, $x=\frac{1+a\pm\sqrt{a^2+2a-7}}{2}$, если $a\leqslant-1-\sqrt{2}$ или $a\geqslant-1+\sqrt{2}$; $x=a-1$, если $-1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$. 3.34. 1. $x<-5$, $x>1/2$. 2. $-1<x<0$, $0<x<2$. 3. $-6<x<-1/2$. 4. $x\leqslant-1$, $0\leqslant x<2/3$, $2/3<x\leqslant 1$. 5. $x<-3$, $x=1/2$, $1\leqslant x<2$. 3.35. 1

$x \leqslant -2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 2$. 2. $-2-\sqrt{3} < x < -2$, $\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < -1$, $-2+\sqrt{3} < x < 0$, $\frac{-1+\sqrt{7}}{3} < x < 1$. 3. $x \leqslant -2$, $\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. 4. $x \leqslant -1$, $1-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 1+\sqrt{3}$. 3.36. 1. $x=6$, $y=4$; $x=-6$, $y=-4$. 2. $x=3$, $y=4$; $x=-3/5$, $y=-16/5$. 3. $x=3$, $y=-2$; $x=-2$; $y=3$; $x=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$, $y=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$; $x=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$; $y=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$. 4. $x=1$, $y=2$; $x=-3$, $y=-2$. 5. $x=2$, $y=1$; $x=-2$, $y=-1$. 6. $x=0$, $y=0$; $x=3/2$, $y=3/2$, $x=5/3$, $y=5/6$. 7. $x=2$, $y=1$; $x=-2$, $y=-1$; $x=4/\sqrt{7}$, $y=-1/\sqrt{7}$; $x=-4/\sqrt{7}$, $y=1/\sqrt{7}$. 8. $x=1$, $y=1$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=1$; $x=-1$, $y=-1$. 9. $x=3$, $y=5$; $x=5$, $y=3$. 10. $x=-2$, $y=3$; $x=3$, $y=-2$. 11. $x=6$, $y=6$; $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$; $x=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$. 12. $x=1$, $y=2$, $z=4$; $x=-1$, $y=-2$, $z=-4$. 13. $x=3$, $y=4$, $z=5$; $x=-3$, $y=-4$, $z=-5$. 14. $x=1$, $y=1$, $z=1$; $x=1$, $y=-1$, $z=-1$; $x=-1$. $y=1$, $z=-1$; $x=-1$, $y=-1$, $z=1$; $x=0$, $y=0$, $z=0$. 15. $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=1$. 16. $x=2$, $y=2$; $x=-2$, $y=-2$; $x=-2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$; $x=2\sqrt{2}$, $y=-2\sqrt{2}$. 17. $x=1$, $y=1$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=1$; $x=-1$, $y=-1$. 18. $x=0$, $y=0$. $z=0$. 19. $x=1$, $y=1$, $z=1$. 3.37. 1. $x=-4$, $x=3$. 2. $x=3$. 3. $x=2$. 4. $x=1$. 5. $x=3$. 6. $x=2$. 7. $x=\frac{7}{2}$. 8. $x=-2$, $x=1$. 3.38. 1. $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 2. $x=6$. 3. $x=0$, $x=\sqrt[7]{1296}$. 4. $x=3$, $x=440$. 5. $x=1-\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}$, $x=1+\sqrt{2}$. 6. $x=-4$, $x=11$. 7. $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. 3.39. 3. $x=\pm\sqrt{5}$. 4. Решений нет. 5. $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$. 3.40. 1. $x=2$. 2. $x=1$. 3. $x=2$. 4. $x=0$. 5. Решений нет. 3.41. 1. $x<-4$, $x>-1$. 2. $-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$. 3. $-3/2 \leqslant x < -2/3$, $x>3$. 4. $x \leqslant -1/3$, $1 \leqslant x \leqslant 5$. 5. $4<x<7$. 6. $-\sqrt{2}<x<3$. 7. $x \leqslant \frac{-5-\sqrt{97}}{6}$, $\frac{-5+\sqrt{97}}{6} \leqslant x < 2$. 8. $-3 \leqslant x \leqslant 9$.

Глава 4

4.1. $(-1;\ 0)$; $(0;\ -1)$; $(0;\ -1)$; $(-1;\ 0)$; $(\sqrt{3}/2;\ 1/2)$; $(\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)$; $(1/2;\ \sqrt{3}/2)$; $(-\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$; $(-\sqrt{3}/2;\ -1/2)$; $-1/2;\ -\sqrt{3}/2)$. 4.4. 1. $t=t_0+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $t=t_0+\pi(1+2k)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $t=-t_0+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $t=-t_0+\pi(1+2k)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $t=t_0+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6. $t_0+2\pi k \leqslant t \leqslant -t_0+\pi(1+2k)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. $t_0+\pi(2k-1) \leqslant t \leqslant -t_0+\pi(2k+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4.5. $\pi/8+\pi k \leqslant t \leqslant \pi/2+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4.8. 1. $\sin 1$. 2. $\sin 1$. 3. $\sin 3$. 4. $\sin 1+\cos 1$. 4.9. 1. $\sin 5$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 8$, $\sin 3$, $\sin 7$, $\sin 1$, $\cos 6$. 2. $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{tg} 5$, $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{ctg} 8$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 4$, $\operatorname{tg} 7$, $\operatorname{tg} 1$. 4.10. 1. $t=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $t=\pi/2+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $t=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $t=\pi/4+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $t=\pi/4+\pi k/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6. $t=(-1)^k \pi/6+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. $t=\pm 3\pi/4+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 8. $t=2\pi k$, $t=\pi/2+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 9. $t=3\pi/4+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 10. $-\pi+2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 11. $-\pi/2+2\pi k<t<\pi/2+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 12. $-\pi/3+2\pi k<t<\pi/3+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 13. $2\pi/3+2\pi k<t<7\pi/3+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 14. $\pi/4+2\pi k<t<5\pi/4+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 15. $\pi/2+2\pi k \leqslant t \leqslant \pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 16. $-\pi+2\pi k<t<2\pi k$, $\pi/6+2\pi k<t<5\pi/6+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 17. $\pi/4+\pi k<t \leqslant \pi/2+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4.13. 1. $-\sqrt{35}/6$; $\sqrt{35}$; $1/\sqrt{35}$. 2. $15/17$; $-8/17$; $-15/8$. 3. $\sqrt{6}/3$; $\sqrt{3}/3$; $1/\sqrt{2}$. 4. $-12/13$; $-5/12$; $-12/5$. 5. 11. 6. 0,22. 7. $-8/3$. 8. -12. 9. -1. 10. 1. 4.14. 1. 1. 2. 2. 3. $\sin^2\alpha$. 4. 1. 5. $\sin\alpha$. 6. 1. 7. 4. 8. 1. 9. -1. 10. 1. 11. -4. 12. 2. 4.16. 1. $\sin\alpha$. 2. $-\sin\alpha$. 3. $\cos^2\alpha$. 4. $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$. 5. $-\sin\alpha-\cos\alpha$. 6. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$. 7. $-2\operatorname{tg}\alpha$. 4.17. $\sqrt{2}/2$; $-\sqrt{3}/3$; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{3}/2$; -1. 2. 4. 3. $\dfrac{2}{\sin^3\alpha}$. 4.18. 1. $1/2$. 2. $1/2$. 3. $\sqrt{2}/2$. 4. $\sqrt{3}/2$. 5. 1. 6. $\sqrt{3}/3$. 7. $1/2$. 8. $\sqrt{3}/2$. 9. $\sqrt{2}/4$. 10. $1/2$. 11. 1. 12. 1. 13. 1. 14. $1/8$. 15. $\sqrt{3}/8$. 16. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. 4.19. 1. $-\sqrt{2}/10$. 2. $-1/3$. 3. $-1/9$. 4. $3/5$; $-4/5$; $-3/4$. 5. $\dfrac{12+5\sqrt{3}}{26}$. 6. $-33/65$. 7. $-1/4$. 8. $1/2$. 9. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 4.20. 1. $\sin\alpha$. 2. $\cos 2\alpha$. 3. $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$. 4. $\cos\alpha-\sin\alpha$. 5. $-\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$. 6. 1. 4.24. $\pi/6$; π; $-\pi/3$; $\pi/2$; $\pi/4$; $5\pi/6$. 4.25. 1. $\pi/2$. 2. π. 3. $-\pi/2$. 4. $\pi/2$. 5. $\pi/2$. 4.28. 1. $x=\pi/2+2\pi k$, $x=(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $x=\pm\pi/3+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x=\pm\arccos\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $x=\pi/4+\pi k/2$, $x=\pm\pi/6+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $x=\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}(-4\pm\sqrt{13})+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6. $x=-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. $x=\pi/4+\pi k$,

$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 8. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 9. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 10. $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 11. $x = \pi/12 + \pi k$, $x = 5\pi/12 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 12. $x = -\pi/4 + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 13. $x = \pi/2 + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 14. $x = \pi/4 + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2} - 2}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 15. $x = \pi/4 + \pi k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 16. $x = \pi/8 + \pi k/4$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4.29. 1. $x = \pi(2k + 1)$, $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $x = 5\pi/12 + 2\pi k$, $x = 11\pi/12 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x = (-1)^k \pi/6 - \arcsin 4/5 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4.30. 1. $x = \pi k/4$, $x = \pi/22 + \pi k/11$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $x = 5\pi/24 + \pi k$, $x = -\pi/48 + \pi k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $x = \pi/26 + 2\pi k/13$, $x = \pi/14 + 2\pi k/7$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $x = \pi/2 + \pi k$, $x = \pi/5 + 2\pi k/5$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6. $x = \pi/8 + \pi k/4$, $x = \pm\pi/3 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. $x = \pi/6 + \pi k/3$, $x = \pi/20 + \pi k/10$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 8. $x = \pi k/5$, $x = \pi/22 + \pi k/11$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 9. $x = \pi/14 + \pi k/7$, $x = \pm\pi/6 + \pi k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 10. $x = \pi k$, $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{1}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ 11. $x = \pm\pi/18 + \pi k$, $x = \pm\pi/6 + \pi k$, $x = \pm 5\pi/18 + \pi k$, $x = \pm 7\pi/18 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 12. $x = -\pi/4 + \pi k$, $x = 2\pi k$, $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 13. $x = \pi/2 + \pi k$, $x = -\pi/10 + 2\pi k/5$, $x = \pi/14 + 2\pi k/7$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 14. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \pi k$, $x = -\frac{1}{4}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 15. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{44}{117} + \pi k$, $x = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 16. $x = \pi k$, $x = \pm\pi/6 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 17. $x = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4.31. 1. Решений нет. 2. Решений нет. 3. $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $x = \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6. $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. Решений нет.

4.32. 1. $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $x = \frac{-11 \pm \sqrt{21}}{10}$. 2. $x = -\pi/4 + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $x = \pi/4 + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x = \pm\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{2l + 1 \pm \sqrt{4l^2 + 4l - 15}}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $l = 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$

4.33. 1. $x = \pi/4 + \pi k + \pi l/2$, $y = \pi/4 + \pi k - \pi l/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. $x = \pi/4 + \pi k/2 + \pi l/2$, $y = \pi/4 + \pi l/2 - 3\pi k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x = \pi/2 + \pi k$, $y = \pi/2 + 2\pi l$; $x = \pi k$, $y = 2\pi l$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $x = \pi k/2$, $y = \pi/2 + 2\pi l$;

$x = \pi k/2, \quad y = \pi + 2\pi l, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4.34. 1. $5\pi/6 + 2\pi k \leqslant x \leqslant 13\pi/6 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, 2. $2\pi k < x < \pi/6 + 2\pi k, \quad 5\pi/6 + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \quad 7\pi/6 + 2\pi k < x < 11\pi/6 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}+3}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4} + \pi k, \quad \pi/4 + \pi k \leqslant x < \pi/2 + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $2\pi k < x < \pi/4 + 2\pi k, \quad \pi/2 + 2\pi k < x < 5\pi/4 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $\pi/6 + 2\pi k \leqslant x < \pi/4 + 2\pi k, \quad \pi/2 + 2\pi k \leqslant x \leqslant 5\pi/6 + 2\pi k, \quad 5\pi/4 + 2\pi k < x \leqslant 3\pi/2 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6. $-\pi/4 + \pi k \leqslant x \leqslant -\pi/6 + \pi k, \quad -\pi/12 + \pi k \leqslant x \leqslant \pi/12 + \pi k, \quad \pi/6 + \pi k \leqslant x \leqslant \pi/4 + \pi k, \quad 5\pi/12 + \pi k \leqslant x \leqslant 7\pi/12 + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$
4.35. 1. $-1 \leqslant y \leqslant 3$. 2. $-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$. 3. $-6 \leqslant y \leqslant 4$. 4. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 5. $-9/8 \leqslant y \leqslant 2$. 6. $y \geqslant -1/4$. **4.36.** Периодичны функции из п. 2, 4, 5. **4.37.** 1. $2\pi k/3$. 2. $\pi k/4$. 3. πk. 4. $2\pi k$. 5. πk $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Глава 5

5.1. 1. $y' = -2$. 2. $y' = 2 - 2x$. 3. $y' = 3(x+2)^2$. 4. $y' = -25/x^6$. 5. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 6. $y' = \frac{11}{4} x \sqrt[4]{x^3}$. 7. $y' = \frac{1}{3} \times (8x\sqrt[3]{x^2} + 7x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x})$. 8. $y' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$.
9. $y' = \frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}$. 10. $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. 11. $y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 12. $y' = \cos x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{\sin x}{1+x^2}$. 13. $y' = \frac{2}{1-\sin 2x}$.
5.2. 1. $y' = 2\cos 2x$. 2. $y' = 50(x+1)^{49}$. 3. $y' = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$.
4. $y' = \frac{3x(3x-1)}{2\sqrt{2x^3 - x^2}}$. 5. $y' = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. 6. $y' = \frac{4}{3\cos^2 2x\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}}$.
7. $y' = -\frac{6\cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))\cdot\cos(\operatorname{tg}^3 x)\cdot\sin(\operatorname{tg}^3 x)\cdot\sin^2 x}{\cos^4 x}$. 8. $y' = \frac{\sin(\cos x)\cdot\sin(\sin x)\cdot\cos x - \cos(\cos x)\cos(\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2(\sin x)}$. **5.3.** 1. $5/4$. 2. $\frac{3\pi-4}{2}$. 3. 0; 0; 27. 4. -14400. 5. 2. **5.4.** 1. 8,12. 2. 99840000. 3. 1,01. 4. 1,988. 5. 0,515. 6. 0,93. 7. 0,79. 8. 0,996.
5.5. 1. $\pi/4$; 0; $3\pi/4$. 2. $y = 7x - 4$. 3. $y = 3x + 2$. 4. (2; 4); $(-3/2; 9/4)$; $(-1; 1)$; $(1/4; 1/16)$. 5. $p = 3$; $q = -2$. 6. $a = 0$; $b = 1$; $c = 2$.
5.6. 3. $p = 3$; $q = 2$. 4. $y = 2x - 1$; $y = 6x - 9$. **5.8.** 1. $(-\infty; +\infty)$ — промежуток возрастания. 2. $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$ — промежутки убывания, $[-1; 1]$ — промежуток возрастания. 3. $[-3/2; -7/18]$ — промежуток убывания, $(-\infty; -3/2]$, $[-7/18; +\infty)$ — промежутки возрастания. 4. $[-1; 0)$, $(0; 1]$ — промежутки убывания, $(-\infty; -1]$,

$[1; +\infty)$ — промежутки возрастания. 5. $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ — промежутки возрастания. 6. $(-1; 0)$ — промежуток убывания, $(-\infty; -1)$, $(0; +\infty)$ — промежутки возрастания. 7. $(-\infty; +\infty)$ — промежуток возрастания. 8. $[2\pi k; \pi/4 + 2\pi k]$, $[\pi/2 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $[5\pi/4 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$ (k — целое число) — промежутки убывания, $[\pi/4 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, $[\pi + 2\pi k; 5\pi/4 + 2\pi k]$, $[3\pi/2 + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ (k — целое число) — промежутки возрастания. 9. $[\pi/4 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$, $(\pi/2 + \pi k; 3\pi/4 + \pi k]$ (k — целое число) — промежутки убывания, $[-\pi/4 + \pi k; \pi/4 + \pi k]$ (k — целое число) — промежутки возрастания. 5.10. 1. -15. 2. 1. 3. 325. 4. 34. 5. -158. 6. 1. 7. 55/13. 8. 3; $\sqrt{3}$. 9. $\frac{\sqrt[3]{9}}{13}$; 0. 10. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-1 - \frac{\pi}{2}$. 11. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$; $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$. 12. 16; -9. 13. 20; -2. 14. -112. 15. $\frac{12}{1135}$; $-\frac{11}{8}$. 5.11. 1. $3 + 2\sqrt{2}$. 2. 8. 3. $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$. 5. 23/2. 6. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 7. $\frac{3(H-R) + \sqrt{9R^2 - 2HR + H^2}}{4}$. 8. $\frac{2\sqrt{3}}{9}aH$. 9. $R^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. 10. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 11. $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. 12. $\sqrt[3]{45\pi V^2}$. 14. Сектор с центральным углом $\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}\pi$. 15. $\frac{R}{\sqrt{2}}$; $2\pi R^2$. 16. $\frac{23 - \sqrt{17}}{16}R$. 17. $\frac{9}{2}a^3$. 18. $\frac{2m}{3k}$ (с). 19. 3ч. 44 мин. 5.14. 1. один. 2. один. 3. два. 4. ни одного. 5. два. 6. два. 7. три. 8. 4 корня, если $0 < a < \frac{621}{16}$; 3 корня, если $a = 0$ или $a = \frac{621}{16}$; 2 корня, если $a < 0$ или $\frac{621}{16} < a < 1000$; 1 корень, если $a = 1000$; нет корней, если $a > 1000$. 9. 3 корня, если $-2 < a < 2$; 2 корня, если $a = -2$ или $a = 2$; 1 корень, если $a < -2$ или $a > 2$. 10. 4 корня, если $a < -\frac{4}{\sqrt[4]{22}}$ или $a > \frac{4}{\sqrt[4]{22}}$; 3 корня, если $a = -\frac{4}{\sqrt[4]{6}}$ или $a = \frac{4}{\sqrt[4]{6}}$; 2 корня, если $-\frac{4}{\sqrt[4]{6}} < a < -1$ или $1 < a < \frac{4}{\sqrt[4]{6}}$; 1 корень, если $a = -1$ или $a = 1$; 0 корней, если $-1 < a < 1$. 11. 3 корня, если $a = 0$; 2 корня, если $-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$ или $0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 1 корень, если $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ или $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0 корней, если $a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ или $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 5.16. $a = -1$, $a = 3$. 5.17. $a \leqslant -13/4$. 5.18. $1 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \leqslant a \leqslant 0$.

Глава 6

6.1. 1. 30. 2. -6. 3. 4. 4. $\frac{31}{480}$. 5. $2\sqrt{2}$. 6. 3/8. 7. 45/32. 8. $\frac{113+2\sqrt{2}}{5}$. 9. $\frac{\pi+2}{4}$. 10. $\frac{\pi+2}{2}$. 11. $-\frac{4-\pi^2}{2}$. 12. $\frac{4-\pi}{4}$. 13. 5/2. 14. $2\sqrt{2}$. 6.2. 1. 1/3. 2. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 3. $-\frac{11845}{8}$. 4. $-\frac{2}{21}$. 5. 2/3. 6. $\pi/4$. 7. $\pi/8$. 8. $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg} 3$. 9. $\pi/4$. 10. $\pi/6$. 11. $\frac{15\sqrt[3]{5}-8\sqrt[3]{4}-1}{4}$ 12. 4. 6.4. 1. $\frac{4\sqrt{2}-2}{9}$. 2. $\pi/32$. 3. $\pi/6$. 4. 1/2. 5. $\frac{\pi^3}{96}$. 6. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$. 6.7. 1. 0; 0; $-\frac{4}{\pi^2+4}$. 2. $\frac{1}{1+\sin^2 1}$; $\frac{1-\pi\sin^2 1}{1+\sin^2 1}$; $\frac{4+\pi\sin^2 1}{4(1+\cos^2 1)}$. 3. $2x\sqrt[3]{1+(x^2+1)^4}$. 4. $(-\infty; 0]$ — промежуток убывания; $[0; \infty)$ — промежуток возрастания. 5. $x = -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6.8. 1. 6. 2. $\pi/2$. 3. 2. 4. 4/3. 5. 1. 6. 32/3. 7. 1/3. 8. $2+\pi^3/6$. 9. $\frac{7-4\sqrt{2}}{2}$. 10. 7/3. 12. 16/3. 6.9. 1. 125/48. 2. 1. 3. $\frac{1}{2}$. 6.10. 1. $\pi/4$. 2. $y=\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})+C$. 3. $\frac{\pi-2}{2}$. 4. $y = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 6.11. 1. $\frac{16}{15}\pi$. 2. $\pi/2$. 3. $\frac{375}{2}\pi$. 4. $\pi^2/2$. 5. $2\pi^2 Rr^2$. 6.12. 1. 1. 2. $\frac{8}{3}\pi$. 3. $\frac{2}{3}\pi hr^2$. 4. $\frac{16}{3}R^3$. 5. $\frac{2}{3}R^3$; $\pi R^2 h-\frac{2}{3}R^3$. 6. $\frac{8}{3}hR^2$. 6.13. 1. $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$. 2. $\frac{1}{2}\rho g l^3$, ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. 3. $\frac{\gamma m M}{c(c+l)}$, где γ — гравитационная постоянная. 4. $\frac{\pi R I_0^2}{\omega}$. 5. $\frac{M\omega^2 l^2}{6}$. 6. $\frac{1}{4}M\omega^2R^2$. 7. $\frac{1}{4}\pi\rho g R^2 H^2$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. 8. $6{,}53\cdot 10^{22}$ Дж.

Глава 7

7.1. 1. 3/2. 2. 6. 3. $-3/2$. 4. -12. 5. 5. 6. 49. 7. 9/5. 8. -1. 9. 2/3. 10. 36. 11. 3/2. 12. 6. 13. 2. 14. 0. 15. -1. 7.2. 1. $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$. 2. $\frac{4ab+2a+b+1}{2a(3-2b)}$. 7.3. 1. $\log_2\frac{1}{7}$. 2. $\log_{\frac{1}{3}} 5$. 3. $\log_{\frac{1}{5}} 3$. 4. $\log_5 2$. 5. $\log_{\frac{1}{8}} 3$. 6. $\frac{2}{3}$. 7. $\log_7 50$. 8. $\log_{18} 7$. 9. $\log_6 5+\log_5 6$. 10. $\log_{101} 100$. 11. 1. 12. $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8$. 7.4. 1. $x=1$. 2. $x=3\log_6 3$. 3. $x=2$. 4. $x=1$. 5. $x=\log_7 3-1$, $x=1$. 6. $x=0$, $x=\frac{3}{2}$. 7.5. 1. $x=1$.

2. $x = \log_4 3 - 1$. 3. $x = 1$. 4. $x = 1$. 5. $x = 4 - \log_3 5$, $x = 4$. 6. $x = -1$, $x = 0$. 7. $x = -2$, $x = 2$. 8. $x = 1$. 9. $x = \frac{\lg 126 - \lg 29}{2(\lg 3 - \lg 2)}$. 10. $x = -1$, $x = 0$. 11. $x = \log_{\frac{2}{5}} 5$, $x = 0$. 12. $x = -1$, $x = 0$.

7.6. 1. $x = 8$. 2. $x = 2/3$. 3. $x = 7/2$. 4. $x = \sqrt{3}$. 5. $x = 4$. 6. $x = 256$. 7. $x = 2$. 8. $x = 4$. 9. $x = 50$. 10. $x = 13$. 11. $x = 2$. 12. $x = -\log_2 5$. 7.7. 1. $x = 1/10$, $x = 1000$. 2. $x = 1/4$. 3. $x = 1/\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. 4. $x=0$. 5. $x = 1/\sqrt{3}$, $x = 3$. 6. $x = 1/10$, $x = 1$. 7.8. 1. $x = 4$. 2. $x = 1$, $x = 30$. 3. $x = 1/9$, $x = 1$, $x = 3$. 4. $x = 1/4$, $x = 3$. 7.9. 1. $x = 1$. 2. $x = 1$. 3. $x = 1$. 4. $x = 3$. 5. $x = 2$. 6. $x = 3$. 7. $x = 2$. 8. $x = 9$. 9. $x = 3$. 7.10. 1. $x > -1$. 2. $x < 5$. 3. $x > \log_{75} 90$. 4. $-1 < x \leqslant 1$. 5. $x > 3$. 6. $-1 < x < 1/2$. 7. $x \geqslant 3$. 8. $-1 < x < -1/2$, $1 < x < 2$. 9. $x < -3/2$, $x > 3$. 10. $0 < x \leqslant \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $2 < x \leqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. 11. $0 < x < 1$, $x > 2$. 7.11. 1. $x = 1$, $y = 3$. 2. $x = 1$, $y = -4$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 16$, $y = -4$; $x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$, $y = 1$; $x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$, $y = 1$. 3. $x = 1/2$, $y = 5$; $x = 4$, $y = 3/2$. 4. $x = 6$, $y = -3$; $x = 36$, $y = -2$. 5. $x = 1/2$, $y = 1/8$; $x = 8$, $y = 2$. 7.13. 1. $y = 3e^{3x}$. 2. $y = \frac{1 - x\ln 2}{2^x}$. 3. $y = x(2\ln x + 1)$. 4. $y = 2(x-1)e^{x^2-2x}$. 5. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$. 7.14. 1. $y = x^x(1 + \ln x)$. 2. $y = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$. 3. $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 4. $y = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$. 5. $y = \frac{\operatorname{ctg} x \ln\cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}$. 7.16. 1. 2 корня, если $a > e$; 1 корень, если $a < 0$ или $a = e$; 0 корней, если $0 \leqslant a < e$. 2. 2 корня, если $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$; 1 корень, если $0 < a < 1$ или $a = e^{\frac{1}{e}}$; нет корней, если $a > e^{\frac{1}{e}}$. 3. 2 корня, если $a < 0$; 1 корень, если $a = 0$; 0 корней, если $a > 0$. 4. 3 корня, если $0 < a < \frac{1}{e^e}$; 2 корня, если $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$; 1 корень, если $\frac{1}{e^e} < a < 1$ или $a = e^{\frac{1}{e}}$; 0 корней, если $a > e^{\frac{1}{e}}$. 7.20. 1. $f(x) = 1/3\,(x^3 - 5)$. 2. $f(x) = -e^{-x} - 1$. 3. $f(x) = \ln x + e - 1$. 4. $f(x) = \ln(-x) + 1$. 5. $f(x) = \ln|x| - 1$. 6. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + 1 - \frac{1}{2}\ln 3$, если $x < -1$; $f(x) = \frac{1}{2} \times \ln\frac{1-x}{x+1} + 1$, если $-1 < x < 1$; $f(x) = 1/2\,\ln\frac{x-1}{x+1} + 1 + 1/2\,\ln 3$, если $x > 1$. 7.21. 1. $f(x) = 2e^{2(x-1)}$. 2. $f(x) = e^{-3x-2}$. 3. $f(x) = 0$. 7.22. 1. $6{,}5 \cdot 10^5$ лет. 2. $\log_{\frac{N_1}{N_0}} 10$ с. 3. $f(x) = 3 \cdot 2^{2-x}$. 4. Нет.

Глава 8

8.8. 3. $x = k/3$, $x = 1/2 + k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 4. $x = k/4$, $x = 1/6 + k$, $x = 5/6 + k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 5. $x = k$, $x = 1/4 + k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 8.11. 1. 1/26; 1/41. 2. 500; 1400. 3. $-1/25$; 1/40. 4. 5; 6. 5. -1; 1. 8.12. 1. 10; 29; 74; 173. 2. 10. 3. 4; 8; 8; 2^{35}. 4. 1; -1. 8.13. 1. 1651500. 2. 164700. 3. 165. 8.14. 4. $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 3$, $c_n = 3n$, $d_n = 6n + 1$, $e_n = 12n - 1$.

8.15. 1. $a_n = 1/n$. 2. $a_n = \sqrt{2^n - 1}$. 3. $a_n = \frac{9}{2}\left\{\frac{n}{3}\right\}\left(1 - \left\{\frac{n}{3}\right\}\right)$.

8.16. 2. $a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$. 3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

5. $a_n = (n-1)\,2^{n-1}$. 7. $a_n = 2^{n-1} + \frac{-1 + (-1)^n}{2} - 1 \quad (n \geqslant 2)$.

8. $a_n = 2^{\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$. 9. $a_n = \frac{1}{1 + 2^{n-1}}$. 8.18. 1. $n - m + 1$.

2. $2^{n+1} + 3n - 7$. 3. $18\frac{1}{512}$. 4. $2^{n+1} - 2^m + \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)$.

5. $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$. 6. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. 8.19. 1. $\frac{-1 + (-1)^n}{2}$. 2. $(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. 3. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. 8.20. 1. $\frac{n}{n+1}$. 2. $\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$. 3. $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. 4. $\frac{n(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}$.

5. $\frac{n! - 1}{n!}$. 6. $(n+1)! - 1$. 8.21. 1. $\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}$, если $q \neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, если $q = 1$. 2. $\frac{n^2 q^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)q^{n+1} + (n+1)^2 q^n - q - 1}{(q-1)^3}$,

если $q \neq 1$; $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если $q = 1$.

3. Получаем $\frac{(n^2+3n+1)2^{n+2} - (n+1)\ \ (n+2)2^{n+1} - 3(n+1)}{4(n+1)}$.

4. $\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(n \sin\frac{n+1}{2}x - \sin\frac{n-1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$. 8.22. 2. $\frac{1}{n}$. 3. $\frac{n+1}{2n}$.

4. $\frac{n+1}{3(n-1)}$. 5. $\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. 6. $\frac{3^{n+1} - 1}{8}$.

Глава 9

9.1. Справедливы утверждения п.п. 2, 3, 5, 6. 9.2. 1. $\{2; 3; 4\}$. 2. Множество всех квадратов. 3. $\{6n \mid n \in N\}$. 4. $\{24n \mid n \in N\}$. 5. $\{24n - 13 \mid n \in N\}$. 6. $\{-1\}$. 9.3. 1. $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. 2. $\{3n + 4 \mid n \in N\}$. 3. Множество всех чисел, не делящихся на 18. 9.4. 1. $\{3\}$. 2. Множество всех правильных n-угольников, $n \geqslant 4$. 3. $\{12n + 6 \mid n \in N\}$. 4. $(1; +\infty)$. 9.9. Существуют в п.п. 2, 4, 5, 8.

9.11. 1. $[0; 1]$. 2. $[0; 4]$. 3. $\{-2; 2\}$. 4. $[-1; 1]$. 5. $[-3; -1] \cup [1; 3]$. 6. $[-1; +\infty)$. 7. $\{0\}$. 8. $[-1; 2]$. 9. $(0; +\infty)$. 10. $[0; 2]$. 11. $\{-1; 2; 5\}$. 12. $[0; 1] \cup \{3; 4\}$. 13. $(-1/2; 3/2) \cup (5/2; 3] \cup [4; 9/2)$. 14. $[-1; 3] \cup [4; 5]$. 15. $(-\infty; 0) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$. 9.15. 1. $g(x) = \frac{x-3}{2}$. 2. $g(x) = \frac{2x+1}{2-x}$. 3. $g(x) = \sqrt{x}$. 4. $g(x) = -\sqrt{x}$. 5. $g(x) = -\sqrt{-x}$. 6. $g(x) = x$, если $x \in [0; 1)$; $g(x) = 3 - x$, если $x \in [1; 2]$. 7. $g(x) = \pi - \arcsin x$. 8. $g(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}$, $x \geqslant 2$. 9. $g(x) = \sqrt{2^x + 1}$, $x \geqslant \log_2 3$. 9.16. 1. $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x - 1$. 2. $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x$. 3. $(g \circ f)(x) = x$, если $x < e$; $(g \circ f)(x) = \frac{x^2}{e}$, если $x \geqslant e$. 8. Не существует. 9.19. 1. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. 2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. 3. $f(x) = \frac{9x^3+6x^2-x+2}{18x^2-2}$. 9.24. 1. Да. 2. Да. 3. Нет. 4. Нет. 9.28. 1. 1. 2. 1. 3. -3. 4. 0. 5. 5/2. 6. 1/2. 7. 1/3. 8. 1/25. 9. 1. 10. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$. 11. 0. 12. 1/2. 13. 0. 14. $\sqrt{3}$. 9.29. 1. 0. 2. π. 3. 0. 4. 1/2. 9.30. 1. 1. 2. $-\frac{1}{4}$. 3. 5/6. 4. 0,085. 6. $\alpha = \frac{1}{10^k}\left(a + \frac{b}{10^l - 1}\right)$. 9.31. 1. 1/2. 2. 0. 3. 1. 4. 1/3. 9.34. 2. 2. 3. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 4. 0. 5. $\sqrt{a}$. 6. $\sqrt[3]{a}$. 7. $-2 \leqslant x_1 \leqslant -1$. 8. $-1/2 \leqslant x_1 \leqslant 1/2$. 9.36. Существует в п.п. 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14. 9.37. 1. 7. 2. 5/19. 3. $-1/3$. 4. 1. 5. 3/2. 6. 1/2. 7. 3/4. 8. 1/3. 9. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 10. $3\sqrt{2}$. 9.39. 1. $a \in (-\infty; +\infty)$. 2. $a \neq 0$. 3. $a \notin Z$. 4. $a \notin Z$. 5. $a \neq 0$, $1/a \notin Z$. 6. $a \neq 0$. 7. $a \in (-\infty; +\infty)$. 8. $a \neq \pm 1$. 9. $a \neq \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 10. $a \in \varnothing$. 11. $a = 0$. 12. $a \notin Q$. 13. a не представимо в виде конечной десятичной дроби. 9.40. 1. 1. 2. 5/3. 3. 1. 4. 1/2. 5. $-1/4$. 6. 1/2. 7. $-7/2$. 8. $-1/2$. 9. 0. 10. 7. 9.41. 2. $a = -2$; $b = 1$. 3. $a = -1$; $b = 1$.

Глава 10

10.1. 2. Поровну. 3. Поровну. 4. Не содержащих множество A. 5. Содержащих точку A. 10.3. 1. 9. 2. $S_1 - S_2 + S_3$. 3. $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$. 4. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$. 5. 4114. 10.5. 8. $1 \leqslant k \leqslant 15$, $19 \leqslant k \leqslant 30$, $k = 48$. 10.7. 1. Единиц. 3. Нет. 10.9. 1. $20 \cdot 10 = 200$. 2. $5 \cdot 7 = 35$. 3. $7 \cdot 7 = 49$. 4. $6 \cdot 7 = 42$. 5. $7 \cdot 9 \cdot 4 = 252$. 6. $33^3 \cdot 10^4$. 7. 88^6. 8. $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14080$. 10. $9 \cdot 10^2 = 900$. 11. $9 \cdot 10^4 = 90000$. 12. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. 13. $9^5 = 59049$. 14. $5 \cdot 6^3 = 1080$. 15. $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29400$. 16. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. 17. $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. 10.10. 1. $\frac{3^m+1}{2}$. 2. 2^n. 10.11. 1. $30!$. 2. $8! = 40320$. 3. $8! = 40320$. 4. $9 \cdot 8! = 9!$. 5. $3 \cdot 4 \cdot 8!$. 6. $3 \cdot 4 \cdot 8!$. 7. $2 \cdot 6 \cdot 8!$. 8. $(5!)^3 \cdot 3!$. 9. $(15!)^2$. 10. $(15!)^2 \cdot 2^{15}$. 11. $10!/2$. 12. $10!/3$.

13. $3\cdot 10!/4$. 10.12. 1. $9\cdot 10^4 - 5^5 = 86875$. 2. $10! - 6\cdot 5\cdot 4\cdot 7! = 3024000$. 3. $9\cdot 10^4 - 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 62784$. 10.13. 1. $9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 = 66429$. 2. $(10^4 - 10\cdot 2\cdot 9 - 10) + (10^3 - 10) + 10^2 + 10 = 10910$. 3. $1\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 13776$. 4. $3\,(8^4 + 8\cdot 1\cdot 8\cdot 9 + 1\cdot 9\cdot 8^2 + 8\cdot 1\cdot 9\cdot 8 + 1\cdot 1\cdot 9^2) = 17715$. 5. $4\cdot 6\cdot 8! + 2\cdot 5\cdot 8! = 1370880$. 6. $2\cdot 1\cdot 8! + 8\cdot 2\cdot 7\cdot 7! = 645120$. 7. $2\cdot 2\cdot 1\cdot 7! + 8\cdot 1\cdot 2\cdot 7! = 100800$. 10.14. 1. $n+1$. 2. $(n+1)^2$. 3. 670. 4. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. 5. 55252. 10.15. 1. а) $\frac{12!}{12} = 11!$; б) $\frac{11!}{2}$; в) $\frac{12!}{6!\cdot 2^6} = 10395$. 2. $\frac{5!}{4} = 30$. 3. $\frac{n!\cdot 2^n}{2n} = (n-1)!\cdot 2^{n-1}$. 4. $\frac{100!}{8^3\cdot 10^4\cdot 18^2\cdot 3!\cdot 4!\cdot 2!}$. 5. $\frac{5!}{2} = 60$. 6. $\frac{7!}{3!} = 840$. 7. $\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$. 8. $\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$. 9. $\frac{11!}{3!3!2!} = 55440$. 11. $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. 12. $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$. 10.16. 1. 21; 1; 40; 1; 70; 105. 2. $n=8$; $n=6$; $n=2$; $n=28$. 3. $C_{10}^3 = 120$. 4. $C_9^4 = 126$. 5. $C_9^8 = 84$. 6. $C_7^5 = 21$. 7. $C_5^2\cdot C_5^3 = 100$. 8. $2^{10} - C_{10}^8 - C_{10}^9 - C_{10}^{10} = 968$. 10.17. 1. $C_{12}^2 = 66$. 2. $C_{12}^3 = 220$. 3. $C_{12}^4 = 495$. 4. $C_5^3 + C_5^3 = 20$. 5. $C_{12}^4 - C_7^4 = 460$. 10.18. 1. $8C_{11}^2 + 11C_8^2 = 748$. 2. $C_8^2\cdot C_{11}^2 = 1540$. 3. $C_{11}^2 = 55$. 4. $C_8^6\cdot C_{11}^5 + C_8^5\cdot C_{11}^6 = 38808$. 10.19. 1. $6\,(C_5^2 + C_5^2 + 5) = 150$. 2. $10\cdot 2\cdot C_9^3 + 10\cdot 2\cdot C_9^4 + C_{10}^2\cdot 2\cdot C_8^2 + C_{10}^2\cdot 4\cdot C_8^3 + C_{10}^2\cdot 2\cdot C_6^4 + C_{10}^2\cdot 1\cdot C_8^4 = 26250$. 10.20. 4. $C_{14}^4 + 5\cdot C_{14}^3 + C_5^2\cdot C_{14}^2 = 3731$. 5. $C_{14}^4 = 1001$. 6. $C_{15}^5 = 3003$. 10.21. 2. $8!\cdot 14833^7$. 10.22. 1. 2^n. 2. 2^{n-1}. 3. 2^{n-1}. 10.23. 3. $(-1)^m C_{n-1}^m$. 4. $(-1)^m C_{n-1}^m - (-1)^{l-1} C_{n-1}^{l-1}$. 5. C_{n+m+1}^{n+1}. 6. $C_{n+m+1}^{p+1} - C_n^{p+1}$. 10.24. 2. $16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$. 3. $\frac{1}{32}a^5 + \frac{5}{8}a^4b + 5a^3b^2 + 20a^2b^3 + 40ab^4 + 32b^5$. 4. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. 5. $x^2 + a^2 + 1 - 2ax + 2x - 2a$. 6. $a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 6abc$. 7. $x^4y^4 + x^4 + 1 - 4x^4y^3 + 4x^3y^3 - 4x^4y - 4x^3 + 4xy - 4x - 12x^3y^2 + 12x^3y - 12x^2y + 6x^4y^2 + 6x^2y^2 + 6x^2$. 8. $2^7C_{10}^3$. 9. $16\times C_7^3 = 560$. 10. 1792. 11. 2268. 12. -1016. 13. 76.

Глава 11

11.1. 1. $8+i$. 2. $-2+3i$. 3. $6-3i$. 4. $-1-i$. 5. $-13-19i$. 6. $3-4i$. 7. $-11-2i$. 8. 1. 9. $-i$. 10. -1024. 11.2. 1. $\frac{1+i}{2}$. 2. $1-2i$. 3. $\frac{-1+5i}{2}$. 4. $3-2i$. 5. $-i$. 6. $-32i$. 11.3. 1. $x=1$; $y=2$. 2. $x=3$; $y=-2$. 11.7. 1. $2i$; $-2i$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. 3. $2+i$; $-2-i$. 11.9. 1. $|z| = 2$, $\arg z = 0$. 2. $|z| = 3$, $\arg z = \pi$. 3. $|z| = 1$, $\arg z = -\pi/2$. 4. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \pi/4$. 5. $|z| = 2$, $\arg z = -\pi/6$. 6. $|z| = 2$, $\arg z = -\pi/3$. 7. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \pi/2$. 8. $|z| = \sqrt{13}$, $\arg z = -\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. 11.13. 4. 1.

5. $\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$. 6. $\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha$. 7. $\dfrac{1}{2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}}\times$ $\times\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2}-i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$, 8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 9. $64-64i$. 10. $512(1+\sqrt{3}i)$.

11.14. 1. $2;\ -1+\sqrt{3}i;\ -1-\sqrt{3}i$. 2. $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}i;\ \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1-\sqrt{3})-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1+\sqrt{3})i;\quad \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1+\sqrt{3})+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(\sqrt{3}-1)i$. 3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. 4. $1+i;\ -1-i;\ 1-i;\ -1+i$. 11.16. 1. ω^2, ω^2, 1. 2. 0. 11.17. 1. $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;\quad 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. 2. $\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha;\ \sin^5\alpha-10\sin^3\alpha\cos^2\alpha+5\cos^4\alpha\sin\alpha$. 3. -2^{50}. 4. 2^{49}.

11.19. 1. $(x+i)(x-i)$. 2. $(x-1-2i)(x-1+2i)$. 3. $(x+1)\times\left(x+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$. 4. $(x-1)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)\times\left(x+\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)$. 5. $\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\times\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. 6. $\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. 7. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\dfrac{2\pi k}{n}-i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\right)$. 11.20. 4. 3. 5. $a=3,\ b=-4$.

11.22. 1. $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$. 2. $\left(x^2+2\left(1+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)x+1+2\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(x^2+2\left(1-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)x+1-2\times\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}\right)$. 3. $(x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\dfrac{\pi k}{n}x+1\right)$.
4. $(x+1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2n+1}x+1\right)$. 11.23. $S_1=-2;\ S_2=-1;\ S_3=5;\ S_4=6;\ S_5=-1/5;\ S_6=-14$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. *Плюс или минус?* По окружности выписано 50 чисел, каждое из которых равно «1» или «—1». Требуется узнать произведение всех этих чисел. За один вопрос можно узнать произведение трех стоящих подряд чисел. Какое наименьшее число вопросов необходимо задать?

2. *Пять n-значных чисел.* Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}.$$

3. *Знакомые и незнакомые.* В некоторой компании каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. Докажите, что в этой компании у всех одно и то же число знакомых. В

4. *Таблица с целыми числами.* В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано целое неотрицательное число. Известно, что если в некоторой клетке таблицы записано число 0, то сумма всех чисел, которые стоят с ним в одном столбце или в одной строке, не меньше n. Докажите, что сумма всех чисел таблицы не меньше $\frac{n^2}{2}$.

5. *Задача о гирях.* На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется какая-нибудь гиря и добавляется на ту или иную чашку весов). Каждой последовательности взвешиваний сопоставляется последовательность из букв Л и П по следующему правилу: k-й член последовательности — буква Л, если при k-м взвешивании перевесила левая чашка, и бук-

ва П, если при k-м взвешивании перевесила правая чашка. Докажите, что для любой последовательности длины n из букв Л и П можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы эта последовательность букв соответствовала последовательности результатов взвешиваний.

6. *Числовой треугольник.* Последовательность строк составляется следующим образом: в первой строке стоят два числа 1, 1; во второй строке стоят три числа 1, 2, 1; в третьей строке стоит пять чисел 1, 3, 2, 3, 1, и вообще, n-ая строка строится по $(n-1)$-й строке так: выписывается $(n-1)$-я строка и между каждыми двумя рядом стоящими числами вписывается их сумма. Докажите, что для каждого натурального $k > 1$ существует такая строка в описанной последовательности строк, что количество чисел, равных k, в этой строке и во всех последующих строках одно и то же. Найдите количество чисел, равных k, в такой строке, если k — простое число.

7. *Какой маршрут дешевле?* В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

Решения дополнительных задач

1. Занумеруем числа последовательно: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50}$. Если задано 49 вопросов, то останется одно произведение трех последовательных чисел, значение которого не выяснялось. Пусть это будет произведение $a_1a_2a_3$. Изменив знаки у всех чисел, номера которых не делятся на 3, кроме числа a_1, мы не изменим ответы

на заданные 49 вопросов, но изменим произведение всех чисел, так что 49 вопросов недостаточно. Выяснив значения 50 произведений $a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \ldots, a_{48}a_{49}a_{50}, a_{49}a_{50}a, a_{50}a_1a_2$ и перемножив эти значения, мы найдем искомое произведение.

2. Найдем двумя способами число пар одинаковых цифр, оказавшихся в одном разряде. Так как каждые два числа совпадают в m разрядах, то число таких пар равно $10m$. С другой стороны, в каждом разряде число таких пар равно 4 или 6. Следовательно, $4n \leqslant 10m \leqslant 6n$, откуда $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.

3. Пусть A и B знакомы. Обозначим через M_A множество знакомых A, а через M_B — множество знакомых B. Очевидно, $M_A \cap M_B = \varnothing$. Докажем, что каждый человек из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B. Пусть $X \in M_A$. Если X есть B, то он имеет в M_B только одного знакомого — самого A. Если X не есть B, то X не знаком с B (так как $M_A \cap M_B = \varnothing$). Следовательно, X и B должны иметь, кроме A, еще ровно одного общего знакомого, т. е. X имеет ровно одного знакомого в M_B. Точно так же доказывается, что каждый человек из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A. Следовательно, в множествах M_A и M_B поровну элементов. Если A и B не знакомы, то у них есть общий знакомый C. По доказанному, у A и B поровну знакомых с C.

4. Если мы поменяем местами любые две строки или любые два столбца таблицы, то получившаяся при этом таблица по-прежнему будет удовлетворять условию задачи. Выберем одну из диагоналей таблицы и перестановкой строк и столбцов добьемся того, чтобы на этой диагонали оказалось максимально возможное число нулей. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа, стоящие в клетках этой диагонали. Обозначим через S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ сумму всех чисел, которые расположены в одном «кресте», т. е. в одной строке или в одном столбце с числом a_i, и докажем, что $S_i \geqslant n$. Это так, если $a_i = 0$. Пусть $a_i \neq 0$. Тогда, если в двух симметричных относительно выбранной диагонали таблицы клетках «креста» расположены нули, то, поменяв местами строки, в которых расположены эти нули, мы увеличим количество нулей на выбранной диагонали таблицы. Поэтому «крест» содержит не более, чем $n - 1$ нулей и, значит, $S_i \geqslant n$. Отсюда $S_1 + S_2 + \ldots + S_n \geqslant n^2$. Но $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ не превосходит удвоенной суммы всех чисел таблицы, откуда и следует утверждение задачи.

5. Пусть A — заданная последовательность букв Л и П. Выпишем члены последовательности A в обратном порядке и обозначим через A' полученную последовательность букв Л и П. Мы докажем утверждение задачи, если сперва определенным образом расположим все гири на чашках весов, а затем укажем, как нужно снимать по одной гире с весов, чтобы левая и правая чашки весов перевешивали, как указано в последовательности A'. Покажем, как это сделать. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — массы гирь, причем $m_1 > m_2 > \ldots > m_n$. Для определенности предположим, что первым членом последовательности A' является буква Л (в противном случае нужно поменять местами левую и правую чашки весов). Положим на левую чашку весов гири масс $m_1, m_3, m_5, \ldots$, а на правую чашку весов — гири масс $m_2, m_4, m_6, \ldots$. Оче-

видно, что при таком расположении гирь перевесит левая чашка весов (независимо от того, на какую из чашек попадет самая легкая гиря). В дальнейшем, если нам нужно очередным снятием гири изменить положение чашек, то мы снимаем самую тяжелую из находящихся на весах гирь, если же нужно сохранить положение чашек, то снимаем самую легкую гирю.

6. Все числа, которые впервые появились в строке с номером n, не меньше, чем n, так что количество чисел, равных k, во всех строках, начиная с k-й, одно и то же. Если два натуральных числа взаимно просты, то каждое из них взаимно просто с их суммой. Так как при этом в первой строке числа взаимно просты, то и в каждой следующей строке соседние числа взаимно просты.

Докажем, что какие бы взаимно простые числа a и b ни взять, в нашем треугольнике есть одно и только одно место, в котором числа a и b стоят рядом, причем a левее b. Это очевидно, если $a + b = 2$. Предположим, что это утверждение верно, если $a + b \leqslant m$, и докажем его при $a + b = m + 1$. Пара $(a; b)$ может получиться только из пары $(a - b; b)$, если $a > b$, и из пары $(a; b - a)$, если $a < b$. Так как по индукционному предположению пара $(a - b; b)$ или $(a; b - a)$) встречается один и только один раз, то и пара $(a; b)$ встречается один и только один раз.

Таким образом, количество чисел в k-й строке, равных k, равно числу пар $(a; b)$ соседних взаимно простых чисел треугольника, сумма которых равна k, и, значит, равно $\varphi(k)$ — количеству натуральных чисел, меньших k и взаимно простых с k. Если k — простое число, то $\varphi(k) = k - 1$. В общем случае формула для вычисления $\varphi(k)$ приведена в пункте 6 задачи 6.3.

7. Пусть S — самая высокая из стоимостей проезда между двумя городами. Предположим, что в первом маршруте есть один или несколько участков, стоимость проезда по которым равна S. Пусть последовательные города $A_0, A_1, \ldots, A_n$ первого маршрута таковы, что проезд по участкам $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ стоит S, а проезд по участкам, предшествовавшему A_0 и следующему за A_n (если такие есть), стоит меньше S.

Таким образом, первый путешественник, покупая билеты в городах $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, n раз уплатит S, а один раз — меньше, чем S. Из способа построения первого маршрута следует, что стоимость проезда между любыми городами A_i, A_j, где $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, равна S. Поэтому второй путешественник, попадая в города $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, каждый раз, кроме последнего, будет иметь возможность купить билет стоимостью S и, следовательно, купит такой билет, так что из $n + 1$ билетов, купленных им в этих городах, по крайней мере n будут иметь стоимость S. Это рассуждение показывает, что у второго путешественника окажется на всем маршруте не меньше билетов стоимости S, чем у первого путешественника. Пусть t — следующая после S по величине стоимость проезда, которая встречается в стране. Установим на участках, стоимость проезда по которым равнялась S, новую стоимость t. Если a_1 и b_1 — старая и новая стоимости проезда по первому маршруту, а a_2 и b_2 — старая и новая стоимости проезда по второму маршруту, то $a_1 - b_1 \leqslant a_2 - b_2$. Продолжая рассуждать подобным образом, мы придем к ситуации, в которой все стоимости проезда между городами станут равными. Если при этом проезд по первому маршруту будет стоить a_k, а по второму маршруту — b_k, то $a_1 - a_k \leqslant b_1 - b_k$ и, так как, очевидно, $a_k = b_k$, то $a_1 \leqslant b_1$.

Марк Иванович Башмаков,
Борис Михайлович Беккер,
Владимир Михайлович Гольховой

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ.
АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

Серия: Библиотечка «Квант»

Редактор *И. М. Овчинникова*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12097

Сдано в набор 08.07.82. Подписано к печати 10.11.82. Формат $84\times108^1/_{32}$.
Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 10,8. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 150000 экз. Заказ № 1916
Цена 35 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10.

35 к.

10

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.
Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.
Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.
Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.
Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.
Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.
Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.
Вып. 8. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.
Вып. 9. Замечательные ученые.
Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС?
Вып. 11. Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика.
Вып. 12. Я. А. Смородинский. Температура.
Вып. 13. А. Е. Карпов, Е. Я. Гик. Шахматный калейдоскоп.
Вып. 14. С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках.
Вып. 15. А. А. Боровой. Как регистрируют частицы.
Вып. 16. М. И. Каганов, В. М. Цукерник. Природа магнетизма.
Вып. 17. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии (планиметрия).
Вып. 18. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. Беседы о преломлении света.
Вып. 19. А. Л. Эфрос. Физика и геометрия беспорядка.
Вып. 20. Л. М. Блинов, С. А. Пикин. Жидкие кристаллы.
Вып. 21. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология.
Вып. 22. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. Задачи по математике (алгебра и анализ).